

線形代数学 II NO.6 要約

今日のテーマ: 直交射影を表す行列 (2)

ベクトル空間 V の基底 $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ が与えられたとき、 V の元 $\sum_i c_i v_i$ は \mathbb{R}^n の元 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ と同一視されるのでした。 V が計量ベクトル空間で、 B が正規直交基底 (ONB) ならば、 V の内積は \mathbb{R}^n の標準内積に対応します。 \mathbb{R}^n の元 u_1, u_2 の標準内積は、行列の積を用いて $u_1 \cdot u_2 = {}^t u_1 u_2$ と書くことができることにも注意しておきます。

先週に引き続き以下でも、標準的な内積を用いる。

P の像 (Image) と核 (Kernel) の定義にも注意しておこう。 $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、

- $v \in \text{Image } P \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = Px (\exists x \in \mathbb{R}^n)$
- $v \in \text{Ker } P \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Pv = \mathbf{0}$

補題 6.1. n 次正方行列 P は $P^2 = P$ を満たすときべき等であるという。 P がべき等で、 $Q = E_n - P$ とおくとき:

- (1) Q もべき等である。
- (2) $PQ = 0, QP = 0$.
- (3) $\text{Image}(P) + \text{Image}(Q) = \mathbb{R}^n$.
- (4) $\text{Image}(P) \cap \text{Image}(Q) = \{\mathbf{0}\}$.
- (5) $\text{Image}(P) \perp \text{Image}(Q)$ と ${}^t P = P$ とは同値。

正方行列 P について、つぎのことにも注意しておく。(上記補題の幾何学的な言い換え)

- $P^2 = P \Leftrightarrow P$ が $\text{Image}(P)$ の各元を変えない
- P がべき等なら、 $v \in \text{Image } P \Leftrightarrow v = Pv$.
- P がべき等のとき、 $Q = E_n - P$ とおけば、
 ${}^t P = P \Leftrightarrow P = {}^t P P \Leftrightarrow (Qv, Pv) = 0 (\forall v, w \in \mathbb{R}^n)$