

## 理工系線形代数学 NO.2 要約

今日のテーマ 行列の演算と実数の演算。

行列の和、差、積は実数を扱うのと同様の扱いで良いのだが、

- (1) サイズが合う物同士しか足したり引いたり掛けたりはできない。
- (2) 積は可換ではない。すなわち、行列  $A, B$  があったとして、 $AB$  と  $BA$  とは、(たとえ両者が存在したとしても、) 一般には等しくない。
- (3)  $A \neq 0, B \neq 0$  としても  $AB = 0$  のことがある。

### ◎ 特別な行列

すべての成分が 0 の行列を零行列とかゼロ行列といい、サイズが  $n, m$  のゼロ行列を  $0_{n,m}$  で表す。

行と列の数が等しい行列を正方行列という。正方行列の  $A = [a_{ij}]$  で、 $i = j$  であるような成分  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  を  $A$  の対角成分という。対角成分がすべて 1 で、残りの成分が 0 であるような正方行列のことを、単位行列と言い、サイズが  $n, n$  の単位行列を  $1_n$  とか、 $E_n$  と表記する。

### ◎ クロネッカーのデルタ。

クロネッカーのデルタと呼ばれる記号  $\delta_{ij}$  を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。単位行列はクロネッカーのデルタを成分にもつ行列である。

**定理 2.1** (行列の演算法則). 以下のことがなりたつ。

- (1) サイズが  $n, m$  の行列の全体  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  は足し算に関して可換群をなす。すなわち、
  - (a)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  ( $\forall A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ )
  - (b)  $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$  ( $\forall A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ ).
  - (c) どんな  $A \in M_n(\mathbb{R})$  にたいしても、 $-A$  と書かれる特別な行列が存在して、 $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$  をみたす。
  - (d)  $A + B = B + A$  ( $\forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ )
- (2) (a) 積は結合的である。すなわち、 $A(BC) = (AB)C$  が任意の  $A \in M_{k,l}(\mathbb{R})$  と  $B \in M_{l,m}(\mathbb{R})$  と  $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  にたいしてなりたつ。(要するに、3つの積が定義されるときにはいつでも成り立つ。)  
(b) 任意の  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  にたいして、

$$1_m A = A, \quad A 1_n = A$$

がなりたつ。

- (3) (a)  $(A + B)C = AC + BC$   
(b)  $C(A + B) = C(A + B)$

注意 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

とおくと、 $AB = 0_2$ ,  $BA = B (\neq 0_2)$  である。積は一般には可換ではなく、0 でないものを2つ掛けて0になることもある。