線形代数学 II NO.13 要約

今日のテーマ: **対称行列の標準形**

今回は複素数の性質、特に複素共役の性質を用いる。行列 A に対して、 $\bar{A}$ で A のそれぞれの成分の複素共役をとった行列を指す。行列 A, B に対して

$\overline{A+B} = \bar{A}+\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ 　　(サイズ的に和や積が定義される限り)

が成り立つことに注意しておこう。

定義 13.1. (対称行列、エルミート対称行列)

(1) 実行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称行列 $\Leftrightarrow {}^tA = A$.

(2) 複素行列 A がエルミート対称行列 $\Leftrightarrow {}^t\bar{A} = A$.

命題 13.2. エルミート対称行列の固有値は必ず実数である。とくに実対称行列の固有値は必ず実数である。

証明. A の固有値の一つを λ とおく。定義により、ある $\mathbb{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在して、$A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v}$. その複素共役をとることにより、$A\bar{\mathbb{v}} = \lambda\bar{\mathbb{v}}$ を得る。${}^t\bar{\mathbb{v}}A\mathbb{v}$ を 2 通りに計算してみよう。一方では

$${}^t\bar{\mathbb{v}}(A\mathbb{v}) = {}^t\bar{\mathbb{v}}\lambda\mathbb{v} = \lambda{}^t\bar{\mathbb{v}}\mathbb{v}$$

であり、他方

$$({}^t\bar{\mathbb{v}}A)\mathbb{v} = {}^t({}^tA\bar{\mathbb{v}})\mathbb{v} = {}^t(\bar{A}\bar{\mathbb{v}})\mathbb{v} = {}^t(\bar{\lambda}\bar{\mathbb{v}})\mathbb{v} = \bar{\lambda}{}^t\bar{\mathbb{v}}\mathbb{v}.$$

よって、$\bar{\lambda}{}^t\bar{\mathbb{v}}\mathbb{v} = \lambda{}^t\bar{\mathbb{v}}\mathbb{v}$. ところが ${}^t\bar{\mathbb{v}}\mathbb{v} = \sum_i \bar{v}_i v_i = \sum |v_i|^2 \neq 0$ であるから、$\lambda = \bar{\lambda}$ すなわち λ は実数である。 □

注意. 上記命題の証明は A が実対称行列である場合においてもエルミート対称行列の特別の場合として上のように証明するほうがスッキリする。**固有値が一つでも存在することの証明が (複素数の議論なしでは) 容易ではないからである。**実数の範囲での証明については教科書を参照のこと。

定義 13.3. (直交行列、ユニタリ行列)

- n 次正方行列 P が直交行列 $\Leftrightarrow {}^tPP = E_n$. (既出)
- n 次正方行列 P がユニタリ行列 $\Leftrightarrow {}^t\bar{P}P = E_n$.

定理 13.4. 実対称行列は直交行列で対角化できる。エルミート対称行列はユニタリ行列で対角化できる。

証明. A が対称行列の場合を考えよう。A を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への一次写像と同一視する。A の固有値の一つ λ をとる。命題 13.2 により、$\lambda \in \mathbb{R}$. よって、(一次方程式の議論により) $A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v}$ となる $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ が存在する。

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\mathbb{v} + (\mathbb{R}\mathbb{v})^\perp$$

と直和分解すれば、A はこの直和分解を保つ。$\mathbb{v}/||\mathbb{v}||$ と、$(\mathbb{R}\mathbb{v})^\perp$ の正規直交基底をとってきて並べたてできた行列を P とおくと、P は直交行列であって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

(A_1 は $n-1$ 次の対称行列) という具合に書ける。A_1 に対して帰納法を用いればよい。A がエルミート行列場合の A の対角化には、複素ベクトル空間の計量の話が必要であるが、議論は同様である。 □

参考:

定義 13.5. 複素ベクトル空間 V が与えられているとする。$V\times V$ から $\mathbb{R}$ への正定値半対称双線形写像を V の**エルミート内積**と呼ぶ。具体的には次の条件を満たすものがエルミート内積である。

(1) $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}=\overline{\mathbb{b}\cdot\mathbb{a}} \qquad (\forall\mathbb{a},\mathbb{b}\in V)$
(2) $\mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}+\mathbb{c})=\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}+\mathbb{a}\cdot\mathbb{c} \qquad (\forall\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}\in V)$
(3) $(\mathbb{a}+\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}=\mathbb{a}\cdot\mathbb{c}+\mathbb{b}\cdot\mathbb{c} \qquad (\forall\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}\in V)$
(4) $(c\mathbb{a})\cdot\mathbb{b}=\mathbb{a}\cdot(\bar{c}\mathbb{b})=c(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}) \qquad (\forall\mathbb{a},\mathbb{b}\in V,\forall c\in\mathbb{R})$
(5) $\mathbb{a}\cdot\mathbb{a}\geq 0. \qquad \mathbb{a}\cdot\mathbb{a}=0\Leftrightarrow\mathbb{a}=\mathbf{0}. \qquad (\forall\mathbb{a}\in V)$

エルミート内積を持つ複素ベクトル空間を **複素計量ベクトル空間** と呼ぶ。

複素計量ベクトル空間でも、シュミットの直交化法に代表されるような技法・定理が同様にある。