線形代数学 II NO.7 要約

今日のテーマ: **固有値**

今回から、行列は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。次の定理が使いたいからである。

定理 7.1. $\mathbb{C}$ 上の 0 でない任意の *1* 変数多項式 f は *1* 次式の積に分解できる。*(*代数学の基本定理*)*

定義 7.2. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、$\lambda \in \mathbb{C}$ が A の**固有値** $\Leftrightarrow \exists \mathbb{v} \neq \mathbf{0}$ such that $A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v}$.

A の固有値 λ に対して、$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$ を満たす $\mathbb{x} \neq \mathbf{0}$ を λ に属する A の**固有ベクトル**と呼ぶ。

上の定義で「属する」のところは「対応する」という言葉を使う流儀もある。

命題 7.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値 $\Leftrightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0$.

系 7.1. $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列 A は少なくとも 1 つの固有値を持つ。

定義 7.4. $f_A(x) = \det(xE_n - A)$ のことを A の固有多項式、方程式 $f_A(x) = 0$ のことを A の固有方程式と呼ぶ。

定理 7.5. 相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に属する固有ベクトル $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_k$ は一次独立である。

補題 7.6. 固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に属する固有ベクトル $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n$ が一次独立であるならば、

$$A(\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n) = (\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n)\mathrm{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

の両辺に $(\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n)^{-1}$ を右から掛けて、

$$A = (\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n)\mathrm{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)(\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_n)^{-1}.$$

定義 7.7. $A = (a_{ij})$ が対角行列であるとは、対角成分以外の成分が 0, すなわち

$$a_{ij} = 0 \qquad (i \neq j \text{ のとき})$$

が成り立つときにいう。

スペースの都合で、この「要約」では「対角行列 $D = \mathrm{diagonal}(d_1, d_2, \dots, d_n)$」という書き方をする。対角成分が $d_1, \dots, d_n$ であとは 0 であるような行列という意味である。

対角行列同士の和や積は特別に易しい。これは、対角行列 $D = \mathrm{diagonal}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ に対しては、基本ベクトル $\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n$ が

$$D\mathbb{e}_1 = d_1\mathbb{e}_1, \quad D\mathbb{e}_2 = d_2\mathbb{e}_2, \quad D\mathbb{e}_3 = d_3\mathbb{e}_3, \quad \dots, \quad D\mathbb{e}_n = d_n\mathbb{e}_n,$$

を満たしているからである。

命題 7.8. 対角行列 $A = \mathrm{diagonal}(a_1, \dots, a_n)$, $B = \mathrm{diagonal}(b_1, \dots, b_n)$ に対して、

(1) $A + B = \mathrm{diagonal}((a_1 + b_1), \dots, (a_n + b_n))$.
(2) $A - B = \mathrm{diagonal}((a_1 - b_1), \dots, (a_n - b_n))$.
(3) $cA = \mathrm{diagonal}(ca_1, \dots, ca_n)$ $(c \in \mathbb{R}.)$
(4) $AB = \mathrm{diagonal}(a_1b_1, \dots, a_nb_n)$.

つまり、対角行列の線形結合、積は成分ごとに行って良い。