

線形代数学 II NO.1 要約

今日のテーマ: 授業の目標, ベクトル空間及び線形写像の復習。

「スカラー」の集合を一つ決めておかなければならない。

定義 1.1. K が体であるとは、 K が和、差、積、商について閉じた集合であるときにいう。詳しくいうと K が体であるとは、 K が和 (+)、積 2 つの演算について閉じていて、以下の条件を満たすときに言う。詳しくは体論でやる。

- (1) K は和について可換群である。すなわち
 - (a) 和は結合的である。 $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($\forall a, b, c \in K$).
 - (b) K には 0_K と呼ばれる特別の元があって、 $x + 0_K = x = 0_K + x$ ($\forall x \in K$) がなりたつ。
 - (c) K の任意の元 x に対して、その反元 $-x$ と呼ばれる元が存在して、 $x + (-x) = 0_K = (-x) + x$ を満たす。
- (2) K は積について可換半群である。つまり、結合法則 $a(bc) = (ab)c$ ($\forall a, b, c \in K$) がなりたつ。
- (3) 分配法則 $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ ($a, b, c \in K$) が成り立つ。
- (4) $K \setminus \{0\}$ は積について群である。つまり
 - (a) K には 1_K と呼ばれる特別の元があって、 $x \cdot 1_K = x = 1_K \cdot x$ ($\forall x \in K$) がなりたつ。
 - (b) K の任意の元 x に対して、その逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、 $x \cdot (x^{-1}) = 1_K = (x^{-1}) \cdot x$ を満たす。

K としては \mathbb{R} をよく用いるが、 $K = \mathbb{C}$ の場合を考えることも時には必要である。

$K = \mathbb{R}$ としたときのベクトル空間を \mathbb{R} 上のベクトル空間とか、実ベクトル空間といい、 $K = \mathbb{C}$ としたときのベクトル空間を \mathbb{C} 上のベクトル空間とか、複素ベクトル空間と呼ぶ。

ベクトル空間とは、その中で和とスカラー倍ができるような集合のことである。ただし和とスカラー倍は次の法則を満たす必要がある。

- (1) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ ($\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$).
- (2) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ ($\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$).
- (3) $\exists 0_V \in V$ such that $0_V + \mathbf{v} = \mathbf{v} + 0_V = \mathbf{v}$ ($\forall \mathbf{v} \in V$).
- (4) 任意の $\mathbf{v} \in V$ にたいして $-\mathbf{v}$ という V の元が取れて $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = 0_V$ を満たす。
- (5) $c_1 \cdot (c_2 \cdot \mathbf{v}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \mathbf{v}$ ($\forall c_1, c_2 \in K, \forall \mathbf{v} \in V$).
- (6) $1_K \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ ($\forall \mathbf{v} \in V$)

ベクトル空間 V, W にたいして、 V から W への線形写像とは、 V から W の写像であって、和とスカラー倍を保つもののことである。

V, W の基底をとることで、線形写像は行列で表せるのであった。行列としては何でもありうるわけだが、基底のとり方を上手に選べば、簡単な行列を扱うだけで済むようにできる場合がある。

とくに、 $V = W$ の場合が本講義の主題である。この場合には、 \mathbf{v} と $A\mathbf{v}$ とを比較できるということが一般の場合と異なる。

一番基本的なのは対角行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

これらは基本ベクトルたちをその定数倍に写す という大事な性質を持つ。

本講義では、次のようなことについて学ぶ:

- 計量ベクトル空間について。
 - 計量ベクトル空間とは、「長さ」と「角度」を扱うことのできるようなベクトル空間である。
 - シュミットの直交化法
 - 直交射影とそれを表す行列
- 正方行列の標準形について。
 - 固有値と固有ベクトル
 - 行列の対角化 (できる場合。)
 - 弱固有値と弱固有空間
 - 行列のジョルダンの標準形 (一般の場合)