環論 NO.8 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《環の準同型定理 (2)》

定理 8.1 (環の準同型定理)**.** 環 R から別の環 S への準同型写像 $\phi: R \to S$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

(1) ϕ の像 $\mathrm{image}\,\phi$ は S の部分環である。
(2) ϕ の核 $I = \mathrm{Ker}\,\phi$ は R のイデアルである。
(3) 剰余環 R/I は $\mathrm{image}\,\phi$ と同型である。

例 8.2. $f_2 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ を $f_2(p) = p(3)$ で定義する。f_2 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_2 : \mathbb{Q}[X]/(X-3) \cong \mathbb{Q}$$

を誘導する。

例 8.3. $f_3 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ を $f_3(p) = p(\sqrt{-1})$ で定義する。f_3 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_3 : \mathbb{Q}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$$

を誘導する。

例 8.4. $f_4 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ を $f_4(p) = p(\sqrt{-1})$ で定義する。f_4 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_4 : \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$$

を誘導する。

例 8.5. $f_5 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$ を $f_5(p) = p(\sqrt{2})$ で定義する。f_5 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_5 : \mathbb{Q}[X]/(X^2-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

を誘導する。

例 8.6. $f_6 : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$ を $f_5(p) = p(\sqrt{2})$ で定義する。f_6 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_6 : \mathbb{Z}[X]/(X^2-2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

を誘導する。

例 8.7. $f_7 : \mathbb{Q}[X,Y] \to \mathbb{C}$ を $f_7(p) = p(2,3)$ で定義する。f_7 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_7 : \mathbb{Q}[X,Y]/(X-2, Y-3) \cong \mathbb{Q}$$

を誘導する。

例 8.8. $f_8 : \mathbb{Q}[X,Y] \to \mathbb{C}$ を $f_8(p) = p(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ で定義する。f_8 は環準同型であり、環の準同型定理により環の同型

$$\bar{f}_8 : \mathbb{Q}[X]/(X^2-2, Y^2-3) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

を誘導する。

今回の例で、$\mathbb{Q}[\sqrt{-1}], (\mathbb{C}), \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ は体である。その意味で、例えば $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ のことを「$\mathbb{Q}$ に $\sqrt{-1}$ を付け加えた体」とよび、$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ と書いたりする。これは体論において基本的な構成である。