ZORN の補題

このページは Wikipedia の Zorn の補題の項 (2017/10/25 閲覧) のコピペを、若干記号等を好みに応じて変更したものである。

定理 0.1. 順序集合 $\mathcal{S}$ があるとする。もし $\mathcal{S}$ の任意の鎖が $\mathcal{S}$ 内に上界を持つとすると、$\mathcal{S}$ は極大元を持つ。

Zorn の補題を使って、次のことを示せる:

補題 0.2. 環 R とそのイデアル I_0 で、$R \supsetneq I_0$ を満たすものがあったとする。このとき、I_0 を含む R の極大イデアルが存在する。とくに、$\{0\}$ でない環 R は極大イデアルを持つ。

証明. Zorn の補題で

$$\mathcal{S} = \{I_0 \text{ を含む } R \text{ の (両側) イデアルのうち } R \text{ 自身以外からなるもの }\}$$

を考える。$\mathcal{S}$ は I_0 を含むので空ではない。$\mathcal{S}$ は包含関係により半順序集合である。R の極大イデアルを見つけることは $\mathcal{S}$ の極大元を見つけることと同じである。

Zorn の補題を適用するために、$\mathcal{S}$ の空でない全順序部分集合 T をとる。$\mathcal{T}$ に上界が存在することを示す必要がある。つまり、イデアル $I \subset R$ が存在して、それは $\mathcal{T}$ のどの要素より以上であり、しかも R よりは厳密に小さいことを示す必要がある。I を $\mathcal{T}$ の全てのイデアルの和集合とする。$\mathcal{T}$ は少なくともひとつ元を持ち、それは I_0 を含んでいるので、和集合 I も I_0 を含み、とくに空集合ではない。I がイデアルであることを示すため、a と b を I の元とすると、ふたつのイデアル $J, K \in \mathcal{T}$ が存在し、$a \in J$ であり、$b \in K$ ある。$\mathcal{T}$ は全順序であったので、$J \subset K$ または $K \subset J$ である。前者の場合は、a も b もともに K の元であり、和 $a+b$ も K の元である。よって、$a+b$ は I の元である。後者の場合は、a も b もともに J の元であるから、同様に $a+b$ は I の元である。さらに、任意の $r \in R$ に対して、ar と ra は J の元であるから、I の元でもある。以上により、I は R のイデアルであることが分かった。

そして、イデアルが R と一致することは 1 を含むことと同値である。そこで、I が R に等しいと仮定すると、それは 1 を含み、$\mathcal{T}$ のある要素が 1 を含むことになり、それは R と一致する。しかし、これは $\mathcal{S}$ から R を除いていたことに矛盾する。

Zorn の補題の条件は確認できたので、$\mathcal{S}$ には極大元が存在する。言い換えると、R には極大イデアルが存在する。 □

上のように、Zorn の補題の適用時には、ある一つの集合の部分集合の全体あるいは一部 (この場合は全体とは異なるイデアル) を使用することも多い。

Zorn の補題の証明の概略。

Zorn の補題

順序集合 S があるとする。もし S の任意の鎖が S 内に上界を持つとすると、S は極大元を持つ。もっと強く、S の任意の元 s_0 に対して、$m \geq s_0$ を満たすような S の極大元 m が存在する。

以下では $s_0 \in S$ を固定し、補題の後半部分を証明する。

$$\mathcal{A} = \{s_0 \text{ を元として含むような } S \text{ の鎖}\}$$

とおく。$\mathcal{A}$ は包含関係に関して順序集合をなす。

(1) $\mathcal{A} \ni \{s_0\}$ よって $\mathcal{A}$ は空ではない。
(2) $\mathcal{A}$ の任意の鎖 $\mathfrak{T}$ は上限 (=最小上界) を持つ。

さて、$\mathcal{A}$ の任意の元 T をとってくる。T は S の鎖であるから、仮定により S 内に上界 a_T を持つ。a_T が S の極大元ならば話は終わりであるから、a_T は極大ではないとしてよい。したがって、ある $b_T \in S$ が存在して、b_T は T のどの元よりも大きい。そこで、おのおのの $T \in \mathcal{A}$ に対してそのような b_T を選び、写像 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を

$$f(T) = T \cup \{b_T\}$$

で定義する。

(3) f は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への増加写像である。

今の場合、 f は狭義増加者像であるから、次の Bourbaki の補題に反する。

Bourbaki の補題

順序集合 A があるとする。もし

(1) $\mathcal{A} \ni \exists a_0$.
(2) $\mathcal{A}$ の任意の鎖 $\mathfrak{T}$ は上限 (=最小上界) を持つ。(これを以下では $\sup(T)$ と書くことにする。)
(3) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への増加写像 f が存在する

とすると、ある $x_0 \in A$ が存在して、$x_0 \geq a_0$ かつ $f(x_0) = x_0$ である。

Bourbaki の補題の証明の概略。

$M \subset A$ が f-認容であるというのを

(1) $f(M) \subset M$
(2) M の任意の鎖 T に対して、$\sup(T) \in M$

で定義する。

$M = \langle a_0 \rangle$ を,「a_0 をふくむ f-認容な A の部分集合のうち最小のもの」として定義する。M は a_0 を含む f-認容な A の部分集合の全体の共通部分であり、「$f, \sup$ を作用として a_0 で生成されたような集合」と思っても差し支えない。この証明の核心はつぎのことである。

証明の核心

$\langle a_0 \rangle = M$ 自身も全順序集合 (つまり、鎖) である。

これがわかると、M 自体が上限 m_0 をもち、M の f-認容性から $m_0 \in M$ である。f の増加性から $f(m_0) = m_0$ すなわち Bourbaki の補題の x_0 としては $m_0 = \sup(\langle a_0 \rangle)$ を取れば良いことがわかるという寸法である。

では「核心」の証明はというと、以下 CM ... じゃなくて次ページ。

(1) $M \ni c$ が extreme $\Leftrightarrow \forall x \in M(x < c \implies f(x) \leq c$ で、「extreme な元」を定義する。
(2) extreme な元 c に対して、$M_c = \{x \in M; |x \leq c \text{ or } f(c) \leq x\}$ と定義すると、M_c 自身も f-認容なことがわかり、したがって $M = M_c$.
(3) $M_{\text{extreme}} = \{c \in M | c \text{ は extreme}\}$ と定義すると、これもまたもや f-認容であることがわかって、$M = M_{\text{extreme}}$
(4) (3) のことから、直ちに M は全順序集合であることがわかる。

という具合。詳しくは成書をご覧いただきたい。
この稿では
S. Lang Real and functional analysis third edition (GTM)
を参考にした。