◎ $\mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ 環準同型は存在しない

もしあったとする.

$f: \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{C}$: ringhom,

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$0 = f(0) = f(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{p\text{個}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{p\text{個}}$$

$$= \underbrace{1+\cdots+1}_{p\text{個}} = p \quad \text{矛盾.}$$

exercise 9.1A

$\mathbb{C}$ から $\mathbb{F}_p$ への環準同型は存在しない

ex. 9.2A

$\underbrace{p_1 \neq p_2}_{\text{素数}}$ のとき, $\mathbb{F}_{p_1} \xrightarrow{\text{ring hom}} \mathbb{F}_{p_2}$ は存在しない.

注意. $\mathbb{F}_q$ は q が素数のべきなら定義される.

$q = p^n$ (p: 素数) のとき.

$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^n}$ は $\mathbb{F}_p$ の n 次拡大 (cf. No.1)

例 $\underbrace{\mathbb{F}_{25}}_{\text{体}}$ は $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ ではない

Sheaf

presheaf (前層) $\mathcal{F}$

X : 位相空間

$\cup$

U open set の各々について $\mathcal{F}(U)$ という対象が定まっている.

$U \supset V \to \rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$

$s \in \mathcal{F}(U)$ 「制限」

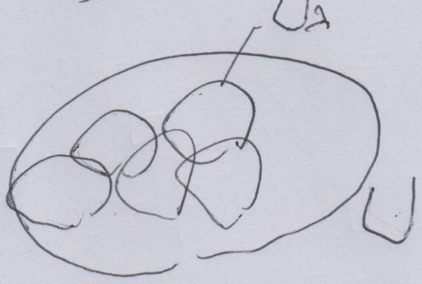
$\rho_{VU}(s) \in \mathcal{F}(V)$

sheaf

$\mathcal{F}$: presheaf が sheaf

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{locality (局所性)} - \circledast \\ \text{gluing lemma (貼り合わせの補題)} - \circledast\circledast \end{cases}$

$\circledast$ f, g が U で定義されていて (つまり $\mathcal{F}(U)$ の元) で,

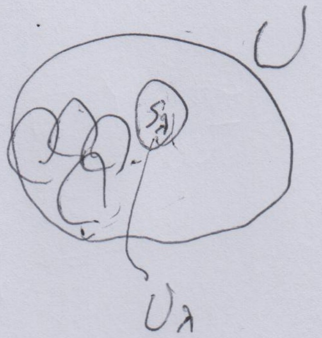


$\begin{cases} U = \bigcup_\lambda U_\lambda \quad U_\lambda : \text{open} \\ f|_{U_\lambda} \left(= \rho_{U_\lambda U}(f)\right) = g|_{U_\lambda} \\ (\forall \lambda) \end{cases}$

→ なら, $f = g$

貼り合わせの補題 (★★)

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$



$\mathcal{F}(U_\lambda)$の元
のことをU_λ上の$\mathcal{F}$の
~~function~~
section
とよぶ.

$\{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

$$s_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda)$$

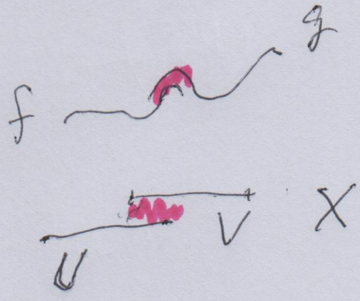
$$s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$$

が全てのλ, μで成立とする.

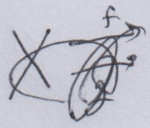
このとき

$$\exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t. } s|_{U_\lambda} = s_\lambda$$

exercise 9.3A (貼り合わせの補題)



X, Y: top.space



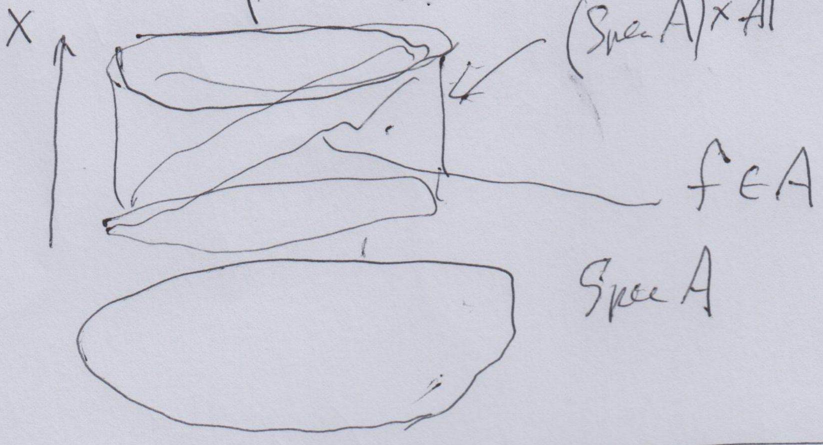
$$X = \underbrace{U \cup V}_{\text{open}}$$

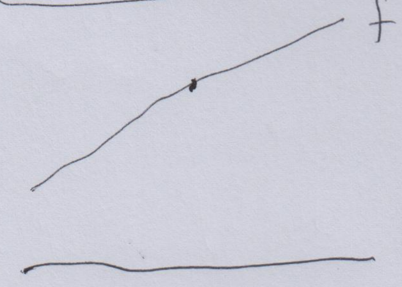
$$\left.\begin{array}{l} f: U \to Y \\ g: V \to Y \end{array}\right\} \text{continuous}$$

$$f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V} \Rightarrow \exists h: X \to Y \text{ continuous}$$

$$h|_U = f,\ h|_V = g$$

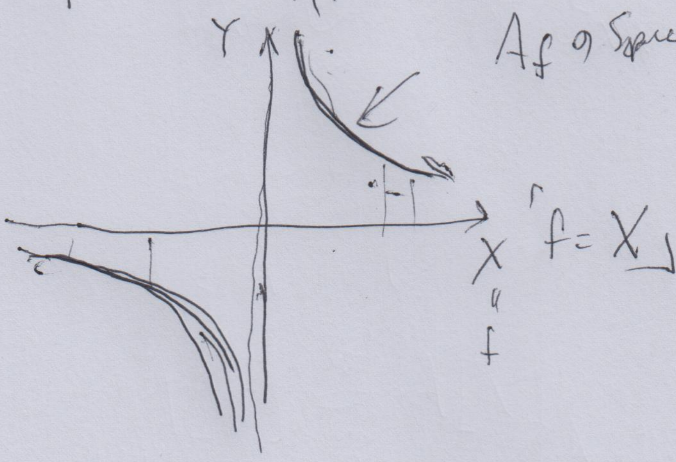
$$A_f = A[X]/(Xf-1)$$





$$\mathrm{Spec}\, A_f \simeq \underbrace{\mathrm{Spec}\, A \setminus 「f=0」}_{= U_f}$$

$$A_f = A[Y]/(Yf-1)$$



(Ex.)

$\mathrm{Spec}\, A_f \to \mathrm{Spec}\, A$

は単射,

$\mathrm{Spec}\, A \setminus \{\mathfrak{p} \mid \mathrm{eval}_{\mathfrak{p}}(f)=0\}$

~~AB~~ への全単射(同相)

$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}(U_f) = A_f$ と定義する.

Gel'fand

X : cpt Hausdorff space $\longleftrightarrow$ $C(X) = C_{\mathbb{C}}(X) =$

1:1 $= \underline{C(X;\mathbb{C})}$

環 (C^*-環)

可換C^*環.

↓

各 $\underset{\text{open}}{U} \subset X$ に対し 関数空間をあてがう

○ 環 A に対し

$\underset{\underset{X}{\parallel}}{\underline{\operatorname{Spec} A}}$ 上の sheaf (structure sheaf

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} (= \mathcal{O}_X$)

を定義する.

$X \supset \underset{\text{open}}{U}$ に対し $\mathcal{O}_X(U) = ?$

<u>localization</u>

$f \in A$ に対し.

$A[\frac{1}{f}] \overset{\text{def}}{=} A[X]/(X \cdot f - 1)$ を A_f とかく

(X のクラス $\overline{X}$ は f の A_f での逆元)

A の f による局所化.

X : top. space , Y : top. space

$U \rightsquigarrow C_Y(U) = \{U \to Y \text{ ; continuous}\}$
連続

C_Y は X 上の sheaf.

X, Y : C^∞ manifold

$C^\infty_Y(U) = \{U \to Y \text{ ; } C^\infty\}$ $\quad (U \underset{\text{open}}{\subset} X)$

$\to C^\infty_Y$: X 上の sheaf ($C^\infty(\cdot\, ; Y)$ とかいたらオダマジ ダメ)

~~$C_{bdd}(X)$~~

X : top. space

~~C_{bdd}~~ $C_{bdd}(U) = \{U \to \mathbb{R}$; 有界$\}$

exercise ~~21~~ 1.4B

$C_{bdd}(\cdot)$ は sheaf ではない

L^1 は sheaf ではない.

L^1_{loc} は sheaf

定理

Spec A 上の ring の $\boxed{\text{sheaf } \mathcal{O}}$ で

$$\mathcal{O}(U_f) = A_f$$

となるものが一意に存在.

この $\mathcal{O}$ を Spec A の 構造層 という

structure sheaf

$(\mathrm{Spec}\,A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A})$ を A の affine spectrum

という.