線形代数学 II NO.1 要約

今日のテーマ: **授業の目標, ベクトル空間及び線形写像の復習。**

「スカラー」の集合を一つ決めておかなければならない。

定義 1.1. K が**体**であるとは、K が和、差、積、商について閉じた集合であるときにいう。詳しくいうと K が体であるとは、K が和 $(+)$、積２つの演算について閉じていて、以下の条件を満たすときに言う。詳しくは体論でやる。

(1) K は和について可換群である。すなわち
 (a) 和は結合的である。 $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(\forall a,b,c\in K)$.
 (b) K には 0_K と呼ばれる特別の元があって、$x+0_K=x=0_K+x$ $(\forall x\in K)$ がなりたつ。
 (c) K の任意の元 x に対して、その反元 $-x$ と呼ばれる元が存在して、$x+(-x)=0_K=(-x)+x$ を満たす。

(2) K は積について可換半群である。つまり、結合法則 $a(bc)=(ab)c$ $(\forall a,b,c\in K)$ がなりたつ。

(3) 分配法則 $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$ $(a,b,c\in K)$ が成り立つ。

(4) $K\setminus\{0\}$ は積について群である。つまり
 (a) K には 1_K と呼ばれる特別の元があって、$x\cdot 1_K=x=1_K\cdot x$ $(\forall x\in K)$ がなりたつ。
 (b) K の任意の元 x に対して、その逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、$x\cdot(x^{-1})=1_K=(x^{-1})\cdot x$ を満たす。

本講義では K としては $\mathbb{R}$ をよく用いるが、$K=\mathbb{C}$ の場合を考えることも時には必要である。

$K=\mathbb{R}$ としたときのベクトル空間を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とか、**実ベクトル空間**といい、$K=\mathbb{C}$ としたときのベクトル空間を$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とか、**複素ベクトル空間**と呼ぶ。

ベクトル空間とは、その中で和とスカラー倍ができるような集合のことである。ただし和とスカラー倍は次の法則を満たす必要がある。

(1) $(\mathbb{v}_1+\mathbb{v}_2)+\mathbb{v}_3=\mathbb{v}_1+(\mathbb{v}_2+\mathbb{v}_3)$ $(\forall \mathbb{v}_1,\mathbb{v}_2,\mathbb{v}_3\in V)$.
(2) $\mathbb{v}_1+\mathbb{v}_2=\mathbb{v}_2+\mathbb{v}_1(\forall \mathbb{v}_1,\mathbb{v}_2\in V)$.
(3) $\exists 0_V\in V$ such that $0_V+\mathbb{v}=\mathbb{v}+0_V=\mathbb{v}$ $(\forall \mathbb{v}\in V)$.
(4) 任意の $\mathbb{v}\in V$ にたいして $-\mathbb{v}$ という V の元が取れて $\mathbb{v}+(-\mathbb{v})=0_V$ を満たす。
(5) $c_1.(c_2.\mathbb{v})=(c_1\cdot c_2).\mathbb{v}$ $(\forall c_1,c_2\in K,\forall \mathbb{v}\in V)$.
(6) $1_K.\mathbb{v}=\mathbb{v}$ $(\forall \mathbb{v}\in V)$
(7) $(c_1+c_2).\mathbb{v}=c_1\mathbb{v}+c_2\mathbb{v}$ $(\forall c_1,\forall c_2\in K,\forall v\in V)$
 $c.(\mathbb{v}_1+\mathbb{v}_2)=c\mathbb{v}_1+c\mathbb{v}_2$ $(\forall c\in K,\forall \mathbb{v}_1,\forall \mathbb{v}_2\in V)$

ベクトル空間 V,W にたいして、V から W への**線形写像**とは、V から W の写像であって、和とスカラー倍を保つもののことである。

V,W の基底をとることで、線形写像は行列で表せるのであった。行列としては何でもありうるわけだが、基底のとり方を上手に選べば、簡単な行列を扱うだけで済むようにできる場合がある。

とくに、$V=W$ の場合が本講義の主題である。この場合には、 $\mathbb{v}$ と $A\mathbb{v}$ とを比較できるということが一般の場合と異なる。

一番基本的なのは対角行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

これらは**基本ベクトルたちをその定数倍に写す** という大事な性質を持つ。

本講義では、次のようなことについて学ぶ:

- **計量ベクトル空間** について。
  - 計量ベクトル空間とは、「長さ」と「角度」を扱うことのできるようなベクトル空間である。
  - シュミットの直交化法
  - 直交射影とそれを表す行列
- **正方行列の標準形**について。
  - 固有値と固有ベクトル
  - 行列の対角化 (できる場合。)
  - 弱固有値と弱固有空間
  - 行列のジョルダンの標準形 (一般の場合)