線形代数学 II NO.14

期末レポート問題 (その 2)

答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。

例題 14.1. p, q, r を複素数として、複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に関する漸化式

$$(☆) \qquad a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。対応する方程式

$$(\text{固有}) \qquad X^3 = pX^2 + qX + r$$

を (☆) の固有方程式と呼ぶことにする。いま、(固有) が相異なる解 α, β, γ をもったと仮定する。次の各問いに答えよ。

(1) 初項 $a_0 = 1$ で、漸化式 (☆) を満たすような等比数列を 3 つ求めよ。

(2) 一般に数列 $\{a_n\}$ に対して、$\mathbb{v}_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ とおく。$\{a_n\}$ が (☆) を満たすとき、 非負の各整数 n に対して、$\mathbb{v}_{n+1} = A\mathbb{v}_n$ をみたす $A \in M_3(\mathbb{C})$ をもとめよ。

(3) 前小問の A を対角化せよ。(ヒント:(1) の結果をよく見て A の固有値と固有ベクトルを見い出せ。)

[8/3 訂正: α, β, γ は (☆) の解ではなくて (固有) の解のつもりでした。本稿では直しました。すみません。]