環論 NO.14 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《ベズーの等式》

命題 14.1. 可換環 R の元 a, b に対して、次は同値である。

(1)

$$(a, b) = (1)$$

(2) ある $l, m \in R$ が存在して、$la + mb = 1$ が成り立つ。

ユークリッド環については、最大公約数が 1 であるような a, b に対して、上の命題のような l, m は互除法により求まるのであった。l, m は色々な意味で大事であるので、今回はその解説をしたい。例としてつぎのような定理、命題を考える。(いくつかは既出である。)

定理 14.2. p が素数であれば、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体である。

定理 14.3. 体 K 上の 既約多項式 $p \in K[X]$ にたいして、$K[X]/p(X)$ は体である。

命題 14.4. a, b は互いに素な正の整数とする。群 G の元 g が $g^a = e$, $g^b = e$ (e は G の単位元) を満足するならば、$g = e$ である。