環論 NO.13 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 環の直積と直積分解。

定義 13.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、R_1, R_2 の環としての**直積**とは、デカルト積集合 $R_1 \times R_2$ の上に、次のような演算を定義したものである。

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$$

R_1 と R_2 の環としての直積を、普通 $R_1 \times R_2$ と書く。

補題 13.2. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、

(1) $R_1 \times R_2$ は環になる。
(2) R_1, R_2 の単位元 がそれぞれ $1_{R_1}, 1_{R_2}$ とすると、$R_1 \times R_2$ の単位元は $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ である。
(3) R_1, R_2 がともに可換ならば、$R_1 \times R_2$ も可換である。

ベクトル空間で基本ベクトルが重要な役割を果たしたように、環の直積においても、$e_1 = (1_{R_1}, 0_{R_2})$ と $e_2 = (0_{R_1}, 1_{R_2})$ が重要な役割を果たす。関係式

$$e_1 + e_2 = 1, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2$$

が成り立つことに注意せよ。e_1, e_2 は直積の「**射影**」(もしくは**射影元**) と呼ばれる。

命題 13.3. 環 R の元 a, b が $(a,b) = (1)$ を満たすとき、

$$R/(ab) \ni [x]_{ab} \mapsto ([x]_a, [y]_b) \ni R/(a) \times R/(b)$$

なる写像は環の同型を与える。

◎ R が PID で、$a, b \in R$ が互いに素ならば、R, a, b は上の命題の条件を満たす。よって、$R/(ab)$ の直和分解が可能である。)

例 13.4 (環の直積分解の具体例)**.**

(1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同型である。
(2) $\mathbb{C}[X]/(X^2 - X)$ は $\mathbb{C}[X]/(X) \times \mathbb{C}[X]/(X-1)$ と同型である。

※三つの環 R_1, R_2, R_3 の直積も二つの場合と同様に定義される。環 $(R_1 \times R_2) \times R_3$ は $R_1 \times R_2 \times R_3$ と同型である。4 つ以上でも同様。

古典的な 105 減算は、同型 $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ をもとにしている。

問題

(I) $L = 2012113$ とおく。このとき、5 桁以上の正の整数 $N(< L)$ を自分できめて、その N にたいして, $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ において、N の逆元をもとめよ。
(II) 1000 で割ると 17 余り、 1003 で割ると 34 余るような整数 n の例を一つ求めよ (途中の計算はある程度省略してよい。ただし求めた方法は書いておくこと。)