

環論 NO.7 要約

今日のテーマ 《環の準同型定理》 環 R から S への準同型 f が与えられたとき、写像に関する一般論から f による R のクラス分けができる。それは $\text{Ker}(f)$ による R のクラス分けと一致する。

定理 7.1. 環準同型 $f: R \rightarrow S$ について、 R の同値関係 \sim_f を

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

で定義し、また $r \in R$ の $R/\text{Ker}(f)$ でのクラスを \bar{r} とすると、次のことが成り立つ。

(1) $x, y \in R$ にたいして、

$$x \sim_f y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

が成り立つ

(2) f は

$$\bar{f}: R/\text{Ker}(f) \ni \bar{r} \mapsto f(r) \in \text{Image}(f) \quad (r \in R)$$

なる同型を誘導する。

代数では群、加群、環、Lie 環など、いろいろなモノについてそれぞれ「準同型定理」がなりたつが、それはすべて次の単純な事実に基づく：

「値による分類」

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 f の行き先でわけることによって X の元の分類(クラスわけ)ができる。

さらに、

Kernel の重要性

f が環の準同型の場合には、 f の値による分類は「差が $\text{Ker}(f)$ に入るかどうかの分類」と同じことである。

(環や加群の準同型では、「差」は $a-b$ で決まるものであるが、群の場合には、 ab^{-1} で与える。)

問題 7.1. 環準同型 $f: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ が与えられていて、 $f(X) = 3$ だと分かっているとす。このとき、

- (1) 多項式 $X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{Z}[X]$ の f による像を具体的に求めなさい。
- (2) $\text{Ker}(f)$ の元で、 0 と異なるものを具体的に3つあげなさい。