理工系線形代数学 NO.9 要約

今日のテーマ: **ベクトル**

実数直線も、$W_0 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$ も、「同じ形」をしている。このような 2 つを同時に扱うのには、成分を見るのではなく、和と、スカラー倍という道具のみを用いて記述することが大事になる。例えば、成分がすべて 0 のベクトル (0 ベクトル) は $\mathbb{v} + \mathbb{v} = \mathbb{v}$ の解と見ることもできる。

定義 9.1. V が $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間**であるとは、つぎの性質を満たしているときにいう。

O (演算の存在) V には、和と、$\mathbb{R}$ の元による定数倍が定義されている。

I (1) $\forall \mathbb{x}, \forall \mathbb{y}, \forall \mathbb{z} \in V$ にたいし、$(\mathbb{x} + \mathbb{y}) + \mathbb{z} = \mathbb{x} + (\mathbb{y} + \mathbb{z})$.

(2) $\exists \mathbb{o} \in V$ があって、 $\forall x \in V$ にたいし、$\mathbb{x} + \mathbb{o} = \mathbb{x}, \quad \mathbb{o} + \mathbb{x} = \mathbb{o}$ がなりたつ。

(3) $\forall \mathbb{x} \in V$ に対して、$\exists \mathbb{y} \in V$ が存在して、$\mathbb{x} + \mathbb{y} = \mathbb{o}, \quad \mathbb{y} + \mathbb{x} = \mathbb{o}$ が成り立つ。

(4) $\forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in V$ にたいして $\mathbb{x} + \mathbb{y} = \mathbb{y} + \mathbb{x}$ が成り立つ.

II (5) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \forall \mathbb{x} \in V \ (c_1 c_2)\mathbb{x} = c_1.(c_2.\mathbb{x})$.

(6) $\forall \mathbb{x} \in V \ 1.\mathbb{x} = \mathbb{x}$.

III (7) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \forall \mathbb{x} \in V \ (c_1 + c_2)\mathbb{x} = c_1 \mathbb{x} + c_2 \mathbb{x}$

(8) $\forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbb{x}, \mathbb{y} \in V \ c(\mathbb{x} + \mathbb{y}) = c\mathbb{x} + c\mathbb{y}$.

定義 9.2. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V があるとする。V の 2 つの元 $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ に対して、内積と呼ばれる実数 $\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_2$ が定義されて、次の性質をみたすとき、V のことを計量ベクトル空間と呼ぶ。

(1) 多重線形性: $(c_1 \mathbb{v}_1 + c_2 \mathbb{v}_2) \cdot \mathbb{w} = c_1(\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{w}) + c_2(\mathbb{v}_2 \cdot \mathbb{w})$ $(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{w} \in V)$

(2) 対称性: $\mathbb{v} \cdot \mathbb{w} = \mathbb{w} \cdot \mathbb{v}$. $(\forall \mathbb{v}, \mathbb{w} \in V)$

(3) 正定値性: $\mathbb{v} \cdot \mathbb{v} \geq 0$ $(\forall \mathbb{v} \in V)$. 等号は $\mathbb{v} = \mathbb{o}$ のときのみ。

計量ベクトル空間の元 $\mathbb{u}$ にたいして、$\sqrt{\mathbb{u} \cdot \mathbb{u}}$ のことを $\mathbb{u}$ の長さといい、$|\mathbb{u}|$ とかく。

補題 9.3. 計量ベクトル空間の元 $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ に対して、次が成り立つ。

(1) $|\mathbb{u} + \mathbb{v}| \leq |\mathbb{u}| + |\mathbb{v}|$.

(2) $|(\mathbb{u} \cdot \mathbb{v})| \leq |\mathbb{u}||\mathbb{v}|$. とくに $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}}{|\mathbb{u}||\mathbb{v}|}$ なる θ が存在する。これを $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ のなす角と呼ぶ。

定義 9.4. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間が 2 次元であるとは、V に 2 つの元 $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ が存在して、次の性質を持つときにいう。

(1) V のどの元も $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ の線型結合で書ける。

(2) $\mathbb{u} \neq \mathbb{o}$.

(3) $\mathbb{v} = c\mathbb{u}$ を満たすような実数 c は存在しない。

(このとき $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ は V の基底であるという。)

上の (2),(3) は 「 $c_1 \mathbb{u} + c_2 \mathbb{v} = \mathbb{o}$ を満たす実数の組 (c_1, c_2) は $(0, 0)$ 以外には存在しない」というのと同じである。この条件が満足されるとき、「$\mathbb{u}, \mathbb{v}$ は一次独立である」という。

補題 9.5. 二次元計量ベクトル空間 V については、次のような基底が存在する。*(正規直交基底)*

$$|\mathbb{u}| = 1, \quad |\mathbb{v}| = 1, \quad \mathbb{u} \cdot \mathbb{v} = 0.$$