体論要約 NO.8 補足

補題 8.2 の証明。

補題 8.2

K の代数拡大体 $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ が与えられたとする。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ のすべての K 上の共役が L 内に存在するならば (すなわち、それらの最小多項式がすべて L 上では一次式の積に分解されるならば)、L は K の正規拡大である。

[証明]

K 上の $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ の最小多項式をそれぞれ $f_1, \ldots, f_t$ とおく。$f = f_1 f_2 \ldots f_t$ とおくと、L は f の最小分解体である。L の元 c を一つ取ってきて、その K 上の共役 c' を考える。$L(c')$ の適当な拡大体 Ω を取れば、体の中への同型 $\varphi : K(c) \to \Omega$ で、$\varphi(c) = c'$ を満たすものが存在し、(必要なら Ω をさらに十分大きなもので取り替えて、) φ は 体の中への同型 $\psi : L \to \Omega$ に拡張できる。$L, \psi(L)$ はともに Ω の部分体で、f の最小分解体であるから、$L = \psi(L)$. 特に L は $\psi(c)(= \varphi(c)) = c'$ を元として含む。