線形代数学 II NO.5 要約

今日のテーマ: **直交射影を表す行列**

まずは復習から: 計量ベクトル空間 V において、

(1) 一次独立なベクトルたち $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3 \ldots,$ が与えられているとする。これらは「三角変換」(補題 3.2 のような「三角行列」で書けるような変換) で直交系に直せた。
  (a) $\mathbb{v}_1$ を そのまま $\mathbb{w}_1$ とおく。
  (b) $\mathbb{v}_2$ を $\mathbb{v}_1$ の方向に歪めて $\mathbb{w}_2 = *\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2$ の形で $\mathbb{v}_1$ と直交なベクトル $\mathbb{w}_2$ を見つける。
  (c) $\mathbb{v}_3$ を $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ の張るベクトル空間の適当な方向に歪めて, $\mathbb{w}_3 = *\mathbb{v}_1 + *\mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3$ の形で $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ と直交なベクトル $\mathbb{w}_3$ を見つける。
  (d) 同様の操作を繰り返す。

(2) さらに、$\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3 \ldots$ をおのおのの長さで割ることにより、正規直交系を得ることができる。

これがシュミットの直交化法であった。$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ を $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_n$ で表す行列 Q は三角行列である。定理 3.3) すなわち、三角行列 Q を用いて、

$$(\mathbb{w}_1\ \mathbb{w}_2\ \cdots\ \mathbb{w}_n) = (\mathbb{v}_1\ \mathbb{v}_2\ \cdots\ \mathbb{v}_n)Q$$

と書くことができる。(なお、定理 3.3 で書かれるものも 3.4 で書かれるものも「三角行列」と呼ばれ、区別のためには前者を「狭義三角行列」とよんだりする。) $A = (\mathbb{v}_i \bullet \mathbb{v}_j)_{i,j}$ を考えて、$\mathbb{w}_i$ として正規直交化したあとのものを採用すると、$\mathbb{v}_*$, $\mathbb{w}_*$ は広義三角行列 Q で結ばれて、内積の関係により、${}^tQAQ = E$. 別の言い方をすると、**正規直交基底 $\mathbb{w}_*$ による座標系を採用すれば、V の内積は標準的な内積と一致する。**

V が計量ベクトル空間、U が有限次ベクトル空間のとき、$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k$ を U の正規直交基底に採ると、$P\mathbb{w} = \mathbb{w}^! = (\sum_{i=1}^k (\mathbb{w}, \mathbb{u}_i)\mathbb{u}_i)$ は U の元であって、$\mathbb{w}^\perp = \mathbb{w} - P\mathbb{w}$ は $U^\perp$ の元、$\mathbb{w} = \mathbb{w}^! + \mathbb{w}^\perp$ と分解できるのであった。P は U への直交射影と呼ばれる。

以下では、標準的な内積を用いる。

補題 5.1. $n \times r$ 行列 T に対して、${}^tTT = E_r \Leftrightarrow T$ の列ベクトルは正規直交系。

正方行列 T に対して、 T の列ベクトルが正規直交系をなすとき、T を直交行列と呼ぶ。

補題 5.2. n 次正方行列 T に対して、次は同値である。

(1) T は直交行列
(2) ${}^tTT = E_n$
(3) $T{}^tT = E_n$

補題 5.3. $n \times n$ 行列 A に対して次は同値である。

(1) 行列 A はある r 次元部分ベクトル空間 $U \subset \mathbb{R}^n$ への直交射影に等しい。
(2) ある r 次元部分ベクトル空間 $U \subset \mathbb{R}^n$ のある正規直交基底を列ベクトルとして並べた $n \times r$ 行列 T にたいして、$A = T{}^tT$, ${}^tTT = E_r$.
(3) ある $n \times r$ 行列 T が存在して $A = T{}^tT$, ${}^tTT = E_r$
(4) $A^2 = A, {}^tA = A$.

前回までの「やってみよう問題」から:
ある計量ベクトル空間 V のベクトル $(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3)$ が、

$$(\mathbb{v}_i \cdot \mathbb{v}_j)_{ij} = B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 11 & -9 \\ 6 & -9 & 25 \end{pmatrix}$$

を満たしているとする。

(1) $a_1\mathbb{v}_1 + a_2\mathbb{v}_2 + a_3\mathbb{v}_3$ と $b_1\mathbb{v}_1 + b_2\mathbb{v}_2 + b_3\mathbb{v}_3$ の内積は

$$(a_1\ a_2\ a_3)B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

である。

(2) $\mathbb{u}_2 = s\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2$ とおくと、

$$\mathbb{u}_2 \perp \mathbb{v}_1 \Leftrightarrow s = 2$$

(3) $\mathbb{u}_3 = t_1\mathbb{v}_1 + t_2\mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3$ とおくと、

$$(\mathbb{u}_3 \perp \mathbb{v}_1 \text{ and } \mathbb{u}_3 \perp \mathbb{v}_2) \Leftrightarrow (t_1, t_2) = (-5, -1)$$

(4) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、${}^tQBQ$ は対角行列である。実際、

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

前回までのやってみよう問題では、上の B の代わりに

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & -14 \\ 6 & -14 & 19 \end{pmatrix}$$

を使ってしまっていましたが、これでは

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となって、内積の正値性が満たされないのでまずかったです。

$$(-5\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3) \cdot (-5\mathbb{v}_1 - \mathbb{v}_2 + \mathbb{v}_3) = -2 < 0$$

となってしまいます。不備をお詫び申し上げます。

(ただし、本講義の本題からははずれますが、このような「長さの二乗にあたるものが負であるようなベクトルを考えに入れる必要のある系 (不定計量のベクトル空間)」も現代では相対論を始め色々なところで出てくる興味深いものではあります。)