

理工系線形代数学 例題

言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。

例題 15.1. x, y, z, w は実数であるとする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \\ 1 & w \end{bmatrix}$$

を正しく計算せよ。

例題 15.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して、

- (1) $\text{Ker}(A)$ を求めよ。
- (2) $\text{Image}(A)$ を求めよ。
- (3) A に対する次元定理を、 $\dim \text{Ker}(A)$ 等がこの場合にはどのような値になるかをきちんと当てはめて、書け。

例題 15.3. a, b は実数とする。

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ a & b & 2 \end{bmatrix}$$

とおく。

- (1) B の固有値をすべて求めよ。
- (2) B の各固有値に属する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。
- (3) B を対角化せよ。

(略解)

15.1

$$\begin{bmatrix} 10 & x + 2y + 3z + 4w \\ 26 & 5x + 6y + 7z + 8w \end{bmatrix}$$

15.2

(1)

$$\text{Ker}(A) = \left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 11 \\ -13 \\ 1 \end{bmatrix} ; t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

(2)

$$\text{Image}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(\mathbb{R}^5) & - & \dim(\text{Ker}(A)) & = & \dim(\text{Image}(A)) \\ 5 & - & 2 & = & 3 \end{array}$$

15.3.

(1) B の固有値は $-5, 3, 2$.(2) B の -5 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ b-a \end{bmatrix}$ B の 3 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a+b \end{bmatrix}$ B の 2 に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3)

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ b-a & a+b & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと、

$$P^{-1}BP = \text{diagonal}(-5, 3, 2).$$