

今日のテーマ 群の準同型定理

定理 11.1 (群の準同型定理). 群 G から別の群 H への準同型写像 $\varphi: G \rightarrow H$ が与えられたとする。このとき、次が成り立つ。

- (1) φ の像 $\text{Image } \varphi$ は H の部分群である。
- (2) φ の核 $N = \text{Ker } \varphi$ は G の正規部分群である。
- (3) 剰余群 G/N は $\text{Image } \varphi$ と同型である。

証明の肝:

Step1. φ によるクラス分けは、 $\text{Ker}(\varphi)$ によるクラス分けと一致する。

Step2. $G/\text{Ker}(\varphi)$ の群の構造は $\text{Image}(\varphi)$ の群の構造と一致する。

例 11.2. 位数 $2n$ の二面体群 $\mathbb{D}_n = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, ab = ba^{-1} \rangle$ から $(\{\pm 1\}, \times)$ への写像 f を、

$$f(a^k b^l) = (-1)^l \quad (k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z})$$

で定めると、これは全射準同型写像になり、 f の核は $\langle a \rangle = \{a^k; k = 0, 1, \dots, n-1\}$ に一致する。ゆえに、 $\langle a \rangle$ は \mathbb{D}_n の正規部分群であり、

$$\mathbb{D}_n/\langle a \rangle \cong \{\pm 1\}$$

が成立することがわかる。

問題

- (I) (a) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ への写像 f を、 $f([x]_{15}) = [x]_5$ で与えたとき、これがうまく定義されていることを示しなさい。
- (b) f が群の準同型であることも示しなさい。
- (c) f の対応表を書いて f によるクラス分けが $\text{Ker}(f)$ によるクラス分けに一致することを確かめなさい。