代数学 IA NO.5 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《有限群の部分群 (オイラー・ラグランジュの定理)》

命題 5.1. $\mu_n(\mathbb{C})$ の部分群 H の元の個数は必ず n の約数である。

状況を観察するために、次の例を考えよう。

例 5.2. $G = \mu_{12}(\mathbb{C})$ とその部分群 $H = \mu_4$ を考える。

(1) H を「ずらしたもの」 $H, H\zeta, H\zeta^2$ が綺麗に並んでいる。
(2) G は H を「ずらしたもの」$H, H\zeta, H\zeta^2$ 3つの和集合として書ける。
(3) G の「ずらしたもの」(G の元をかけて作ったもの) はこれらしかなく、また、それらは互いに交わらない (か、完全に一致するかのどちらかである)。
(4) $H, \quad H\zeta, \quad H\zeta^2$ はどれも元の数が 4 つである。
(5) $|G| = |H| \times 3.$

一般の群についても同じようなことが言える:

定理 5.3 (オイラー・ラグランジュ)**.** 有限群 G の部分群 H が与えられたとする。このとき、

(1) G は Ha の形の部分集合の互いに交わらない和集合である。

$$G = Ha_1 \coprod Ha_2 \coprod \cdots \coprod Ha_t \qquad (\exists a_1, a_2, \ldots, a_t \in G)$$

(2) 各「クラス」 Ha の元の数は H の元の数と等しい。
(3) 異なる「クラス」 Ha の数 (上の t のこと) を $[G : H]$ と書くことにすると、

$$|G| = |H|[G : H]$$

が成り立つ。

系 5.4. 有限群 G の各元 g にたいして、

(1) g の位数 $\mathrm{ord}(g)$ は有限である。
(2) g で生成される G の部分群 $\langle g \rangle$ の (群としての) 位数は $\mathrm{ord}(g)$ と等しい
(3) $\mathrm{ord}(g)$ は $|G|$ の約数である。(オイラーの定理)