

## 線形代数学 II NO.10 要約

今日のテーマ: 行列の三角化。

今回も引き続き、行列は複素数体  $\mathbb{C}$  上で考える。

**定理 10.1.**  $n$  次正方行列  $A$  は常に三角化可能である。すなわち、ある上半三角行列と相似である。

**定義 10.2.**  $\mathbb{C}$  係数の  $n$ -次正方行列  $A$  と一変数多項式  $f(x)$  に対して、 $f(A)$  を次のように定義する:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

にたいして、

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots a_1 A + a_0 E_n.$$

**系 10.1 (Cayley-Hamilton).** 行列  $A$  の固有多項式  $f_A$  を考える。 $f_A$  に行列  $A$  を代入したものの  $f_A(A)$  はゼロ行列に等しい。

証明には次のことを用いる。

**補題 10.3.** 正方行列  $A_1, A_2$  が相似、すなわちある正則行列  $P$  が存在して  $A_1 = PA_2P^{-1}$  であるとき、 $f(A_1) = Pf(A_2)P^{-1}$ 。

**補題 10.4.**  $n \times n$ -行列  $A$  が、 $(n-1) \times (n-1)$ -行列  $B$  と定数  $\lambda$  を用いて、 $A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$  と表せているとき、

$$(1) A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$$

(2) もっと一般に、任意の一変数多項式  $f(x)$  に対して、

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & * \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

**注意 10.1.** 補題 10.4 は  $\lambda$  のところが数ではなく、行列であっても (つまり、ある  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  にたいして  $\lambda$  が  $k \times k$ -行列、 $B$  が  $(n-k) \times (n-k)$  行列であっても) 同様に成り立つ。