線形代数学 II NO.5 要約

今日のテーマ: **直交射影を表す行列**

まずは復習から:

(1) 一次独立なベクトルは「三角変換」(補題 3.2 のような「三角行列」で書けるような変換) で直交系に直せた。

(2) さらに、おのおのの長さで割ることにより、正規直交系を得ることができる。

これがシュミットの直交加法であった。(なお、定理 3.3 で書かれるものも 3.4 で書かれるものも「三角行列」と呼ばれ、区別のためには前者を「狭義三角行列」とよんだりする。) 他方で、

(1) 内積は、基底 $B = (\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \dots \mathbb{u}_k)$ を一つ採るとグラム行列 A_B で書くことができる。グラム行列は $A_B = (\mathbb{u}_i \cdot \mathbb{u}_j)_{ij}$ で与えられる行列であり、

$$(1\mathbb{u}_1 + 2\mathbb{u}_2 + 3\mathbb{u}_3) \cdot (4\mathbb{u}_1 + 5\mathbb{u}_2 + 6\mathbb{u}_3) = (1\ 2\ 3) A_B \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(2) 内積の関係式は前項の行列算を積み上げる (行列の連結をする) ことで行列の関係式として書くこともできる。

(3) 正規直交基底に関するグラム行列は単位行列である。(標準的な内積に一致)

以下では、標準的な内積を用いる。

補題 5.1. $n \times r$ 行列 T に対して、${}^tTT = E_r \Leftrightarrow T$ の列ベクトルは正規直交系。

正方行列 T に対して、 T の列ベクトルが正規直交系をなすとき、T を直交行列と呼ぶ。

補題 5.2. n 次正方行列 T に対して、次は同値である。

(1) T は直交行列

(2) ${}^tTT = E_n$

(3) $T{}^tT = E_n$

補題 5.3. $n \times n$ 行列 A に対して次は同値である。

(1) 行列 A が直交射影

(2) ある $n \times r$ 行列 T が存在して $A = T{}^tT$, ${}^tTT = E_r$

(3) $A^2 = A, {}^tA = A.$