

線形代数学 II NO.1 要約

今日のテーマ: 授業の目標, ベクトル空間及び線形写像の復習。

「スカラー」の集合を一つ決めておかなければならない。

定義 1.1. K が体であるとは、 K が和、差、積、商について閉じた集合であるときにいう。詳しくいうと K が体であるとは、 K が和 (+)、積 2 つの演算について閉じていて、

- (1) K は和について可換群である。すなわち
 - (a) 和は結合的である。 $(a+b)+c = a+(b+c)$ ($\forall a, b, c \in K$) .
 - (b) K には 0_K と呼ばれる特別の元があって、 $x+0_K = x = 0_K+x$ ($\forall x \in K$) がなりたつ。
 - (c) K の任意の元 x に対して、その反元 $-x$ と呼ばれる元が存在して、 $x+(-x) = 0_K = (-x)+x$ を満たす。
- (2) K は積について可換半群である。つまり、結合法則 $a(bc) = (ab)c$ ($\forall a, b, c \in K$) がなりたつ。
- (3) 分配法則 $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c)a = ba+ca$ ($a, b, c \in K$) が成り立つ。
- (4) $K \setminus \{0\}$ は積について群である。つまり
 - (a) K には 1_K と呼ばれる特別の元があって、 $x \cdot 1_K = x = 1_K \cdot x$ ($\forall x \in K$) がなりたつ。
 - (b) K の任意の元 x に対して、その逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、 $x \cdot (x^{-1}) = 1_K = (x^{-1}) \cdot x$ を満たす。

詳しくは体論でやる。 K としては \mathbb{R} をよく用いるが、 $K = \mathbb{C}$ の場合を考えることも時には必要である。

$K = \mathbb{R}$ としたときのベクトル空間を \mathbb{R} 上のベクトル空間とか、実ベクトル空間といい、 $K = \mathbb{C}$ としたときのベクトル空間を \mathbb{C} 上のベクトル空間とか、複素ベクトル空間と呼ぶ。

ベクトル空間とは、その中で和とスカラー倍ができるような集合のことである。

- (1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
- (2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
- (3) $\exists 0_V$ such that $0_V + v = v + 0_V = v$.
- (4) 任意の $v \in V$ にたいして $-v$ という V の元が取れて $v+(-v) = 0_V$ を満たす。
- (5) $c_1 \cdot (c_2 \cdot v) = (c_1 \cdot c_2) \cdot v$.
- (6) $1_K \cdot v = v$ ($\forall v \in V$)

ベクトル空間 V, W にたいして、 V から W への線形写像とは、 V から W の写像であって、和とスカラー倍を保つもののことである。

V, W の基底をとることで、線形写像は行列で表せるのであった。行列としては何でもありうるわけだが、基底のとり方を上手に選べば、簡単な行列を扱うだけで済むようにできる場合がある。

とくに、 $V = W$ の場合が本講義の主題である。この場合には、 v と Av とを比較できるということが一般の場合と異なる。

一番基本的なのは対角行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

これらは基本ベクトルたちをその定数倍に写す という大事な性質を持つ。