微分積分学基礎 NO.6 要約

今日のテーマ:**平均値の定理ほかまとめ**

定理 6.1 (中間値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が与えられていて、$f(a) < f(b)$ と仮定する。$f(a)$ と $f(b)$ の間の値 y_0 を準備すると、必ずある $[a, b]$ の元 x_0 が存在して、$f(x_0) = y_0$ を満たす。

証明のアイディア:
上下ゲーム。考えている区間の点を半分にしつつ, 切り口で f の値が y_0 より上か下かによって都合の良い方の区間を選ぶ。

定理 6.2 (最大値の原理)**.** 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f は最大値を取る。

証明のアイディア:
区間を半分にしつつ、f の値の大きそうな方を選ぶ。

上の 2 つに共通する大事な定理:

定理 6.3. ($[a, b]$ のコンパクト性) $[a, b]$ の閉区間を狭めていくと、必ず点が残る。もっと詳しく言えば、$[a, b]$ の空でない閉区間の減少列 $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ は必ず共通部分を持つ。

証明: 大事であるが、実数の構成にまで迫らないと証明できないのでここでは省略する。

定理 6.4 (平均値の定理)**.** f は $[a, b]$ を含む開区間で微分可能とする。このとき $[a, b]$ のある点 c で、

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすものが存在する。

証明の方針:

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a))$$

を考える。この関数はある点 $c \in (a, b)$ で最大値か最小値を取る。($g(a) = g(b) = 0$ に注意。) $g'(c) = 0$ でなければならない。
つぎの命題が効いてくる。

命題 6.5. f は $[a, b]$ を含む開区間で微分可能とする。$c \in [a, b]$ に対し、
(1) f が $c \in [a, b]$ で最大値を取れば、$f'(c) = 0$ である。
(2) $f'(c) > 0$ であれば、f は c の近くで単調増加関数である。
(3) $f'(c) < 0$ であれば、f は c の近くで単調減少関数である。