微分積分学基礎 NO.4 要約

今日のテーマ:**微分**

定義 4.1. 実数 a を含む区間上で定義された関数 f にたいして、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在するとき、f は a で微分可能であるという。極限 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ のことを $f'(a)$ と書き、f の a における微分係数と呼ぶ。

定義 4.2. (ランダウの記号) $\lim_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ のとき、f は g に比べて高位の無限小であるといい、"$f(x) = o(g)$ ($x \to a$ のとき)" と表記する。

例 4.3. Landau の記法で言えば連続性、微分可能性は次のように表現される。

(1) f が a で連続であることは、

$$f(x) = f(a) + o(1)$$

と同値である。

(2) f が a で微分可能であることは、ある定数 c に対して、

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + o(x - a)$$

と同値である。

定義 4.4. f がある区間の各点で微分可能であるとき、関数 $x \mapsto f'(x)$ のことを f の導関数と呼ぶ。

事実 4.5. 次のことはしばらく証明なしに用いる。

(1) 三角関数の加法定理

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \text{ (サインコス + コスサイン)}$$
$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \text{ (コスコス − サインサイン)}$$

(2) 指数関数の指数法則

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

例 4.6. 三角関数の加法定理、指数関数の指数法則、$\sin(x) = x + o(x)$, $e^x = 1 + x + o(x)$ を知識として仮定する。このとき、

(1) $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
(2) $(e^x)' = e^x$.
(3) $(\log(x))' = \frac{1}{x}$