代数学 III 要約 NO.10

今日のテーマ:**3 次・4 次の方程式の解法**

3 次方程式

$$X^3 - aX^2 + bX - c = 0$$

を解こう。この方程式の根を x_1, x_2, x_3 とする。根が何であるか、具体的に知らないわけだが、その存在は既に知っている。x_1, x_2, x_3 の持つ性質から逆算して、その解き方を見ようというわけだ。

(★) $$X^3 - aX^2 + bX - c = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$

を展開することにより、いわゆる根と係数の関係

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b, \quad x_1x_2x_3 = c$$

が得られる。a, b, c は知っている数だから、x_1, x_2, x_3 の基本対称式の値を知っているということになる。x_1, x_2, x_3 の対称式の値もこれらから (x_1, x_2, x_3 の値を個別に知らなくても) 計算できる。したがって、如何にして便利な対称式を作るか、が大事になる。

ラグランジュの分解式

(R1) $$r_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \quad r_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$$

を考えてみよう。(ただし $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$.) これら自体は x_1, x_2, x_3 の対称式ではないが、

補題 10.1. $t_1 = r_1^3 + r_2^3$ と $t_2 = r_1^3 r_2^3$ はともに x_1, x_2, x_3 の対称式である。

実際、

$$t_1 = 2a^3 - 9ab + 27c, \quad r_1 r_2 = a^2 - 3b, \quad t_2 = (a^2 - 3b)^3.$$

このことから、r_1^3, r_2^3 を二次方程式

$$X^2 - t_1 X + t_2 = 0$$

の二根として計算することができて、あとはその 3 乗根として r_1, r_2 を計算できる。そこから x_1, x_2, x_3 を出すのは連立一次方程式を解けばよい (ラグランジュの分解式二つと根と係数の関係の一番目の式) ので簡単である。

4 次方程式の場合を考えよう。根を x_1, x_2, x_3, x_4 とおくと、

$$X^4 - aX^3 + bX^2 - cX + d = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4).$$

ここから根と係数の関係が得られ、やはり x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式は a, b, c, d から (x_1, x_2, x_3, x_4 の値を知らなくても) 計算できる。

ラグランジュの分解式として、

$$r_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \quad r_2 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \quad r_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

をとる。$r_1^2,\ r_2^2,\ r_3^2$ の基本対称式

$$s_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad s_2 = r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2, \quad s_3 = r_1^2 r_2^2 r_3^2$$

はそれぞれ x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式になっていることが分かり、したがって a, b, c, d から計算できる。すなわち、r_1^2, r_2^2, r_3^2 は

$$X^3 - s_1 X^2 + s_2 X - s_3$$

の三根であるから、前段のように巾根を用いて a, b, c, d から計算できる。あとはその平方根を計算すれば、r_1, r_2, r_3 が計算されて、一次方程式の根として x_1, x_2, x_3, x_4 が計算されるという仕組である。

問題 10.1. 3 次方程式の解法において、x_1, x_2, x_3 の置換 (6 つある) によって (R1) の分解式 r_1, r_2 がそれぞれどのように変化するか、実際に書き下しなさい。

問題 10.2. 4 次方程式の解法で前問と同様のことを考えてみなさい。

[ガロア対応の証明]

体 K のガロア拡大 L が与えられているとする。$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、

$$\mathcal{F}(H) = \{x \in L; g.x = x(\forall g \in H)\}$$

と定義する。L と K の中間体 M に対して、

$$\mathcal{G}(M) = \{g \in G; g.x = x(\forall x \in M)\}$$

と定義する。この時、次のことが成り立つ。(単調減少性)

(1) G の任意の部分群 H_1, H_2 に対して、

$$H_1 \subset H_2 \implies \mathcal{F}(H_1) \supset \mathcal{F}(H_2).$$

(2) L/K の任意の中間体 M_1, M_2 に対して、

$$M_1 \subset M_2 \implies \mathcal{G}(M_1) \supset \mathcal{G}(M_2).$$

(3) G の任意の部分群 H にたいして、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(H)) \supset H.$$

(4) L/K の任意の中間体 M に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(M)) \supset M.$$

実は、上の (1)-(4) から、全く形式的な計算で次のことが成り立つことがわかる。
(”3 回=1 回”)

(1) G の任意の部分群 H にたいして、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(H))) = \mathcal{F}(H).$$

(2) L/K の任意の中間体 M に対して、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(M))) = \mathcal{G}(M).$$

ガロア理論では、さらに次のことが分かる。(狭義単調減少性)

(1) G の任意の部分群 H_1, H_2 に対して、

$$H_1 \subset H_2, \mathcal{F}(H_1) = \mathcal{F}(H_2) \implies H_1 = H_2$$

(補題 9.2 による。)

(2) L/K の任意の中間体 M_1, M_2 に対して、

$$M_1 \subset M_2, \mathcal{G}(M_1) = \mathcal{G}(M_2) \implies M_1 = M_2.$$

(命題 8.5 による。)

このことから、最後に次のことが分かる。
(”2 回=0 回”)

(1) G の任意の部分群 H にたいして、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(H)) = H.$$

(2) L/K の任意の中間体 M に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(M)) = M.$$