

今日のテーマ:体の同型を数える。

体  $K$  上の分離代数的な元  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  に対して、 $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  の元  $\gamma$  が存在して、 $L = K(\gamma)$  とできるのであった。この  $\gamma$  は  $K$  上分離的に取れる。

体  $K$  の拡大体  $M$  と  $\Omega$  とがあるとき、 $M$  から  $\Omega$  への  $K$ -同型の数を数えることにより、 $M$  の性質がある程度分かる。本日はそんな話。

**定義 7.1.**  $M$  から  $\Omega$  への  $K$ -同型の全体の集合を

$$\text{Hom}_K^{\text{algebra}}(M, \Omega)$$

と書く。

まず  $M$  が  $K$  の単純拡大のときから考えてみよう。

**補題 7.2.** 体  $K$  上の代数的数  $\alpha$  の最小多項式を  $m(X)$  とおく。 $K$  の拡大体  $\Omega$  にたいして、 $\Omega$  内の  $m$  の根を、重複を許さずに (つまり重複を取り除いて) ならべたものを  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  とすると、 $K(\alpha)$  から  $\Omega$  への  $K$ -同型はちょうど  $s$  個存在する。とくに、 $s \leq [K(\alpha) : K]$  で、等号は次の二つの条件がともに成り立つとき、そしてそのときに限りなりたつ。

- (1)  $\alpha$  は  $K$  上分離的である。
- (2)  $\Omega$  は  $m$  の分解体である。

上の補題は、 $\Omega$  が十分大きいときには  $\text{Hom}_K^{\text{algebra}}(M, \Omega)$  の元の数分離性の判定に使えることを示唆している。上の補題を何度も用いることにより、次のことが証明できる。

**命題 7.3.**  $K$  上代数的な元  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  と  $K$  の拡大体  $\Omega$  について、 $M = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$  と書くと、

$$\text{Hom}_K^{\text{algebra}}(M, \Omega) \leq [M : K].$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  がすべて  $K$  上分離的で、 $\Omega$  がそれらの最小多項式すべての分解体ならば、等号が成り立つ。

ちょっとトリッキーだが、次のことにも注意しておこう。

**補題 7.4.**  $K$  の拡大体  $M$  のどれかひとつの元  $\alpha$  が  $K$  上非分離的であるならば、

$$\text{Hom}_K^{\text{algebra}}(M, \Omega) < [M : K].$$

証明は  $K(\alpha)$  で一旦途中下車することにより得られる。次の系は分離性の判定が生成元だけで済むことを示しており、大切である。

**系 7.5.**  $K$  上代数的な元  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  が  $K$  上分離的ならば  $M = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$  の元はすべて分離的である。

「大きな体」 $\Omega$  に頼ってばかりいると面倒である。これを排除するために (もちろん他の理由もあるが) 次のようなものを考える。

**定義 7.6.**  $K$  上の代数拡大体  $L$  が  $K$  上**正規拡大**であるとは、 $L$  の任意の元の任意の共役が  $L$  に属するときをいう。言い換えると、これは  $L$  の各元の  $K$  上の最小多項式が必ず  $L$  上で一次式の積に分解されるということである。

**定義 7.7.** 体  $K$  の分離的かつ正規な代数拡大を**ガロア拡大**と呼ぶ。

体  $K$  のガロア拡大  $M$  が与えられたとすると、上で  $\Omega$  として使っていたものの代わりに  $M$  自身を使えることがわかる。

**問題 7.1.**  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$  は  $\mathbb{Q}$  の正規拡大であることを定義に従って確認しなさい。



<http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi/>