代数学 IA NO.3 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 《生成される (部分) 群》

群 G と、その部分集合 M とが与えられているとする。このとき、

- M で生成される G の部分群とは、M を含む最小の部分群のことである。
- 特に、G 自身が M で生成される G の部分群であるとき、単に、G は M で生成される。という。

《生成される部分群》の正確な定義は次のようになる。

定義 3.1 (《生成される部分群》の定義)**.** 群 G とその部分集合 M とが与えられているとする。G の部分群 H が M **で生成される** G **の部分群**であるとは、次の条件を満たすときに言う。

(生成 1) H は M を部分集合として含む G の部分群である。
(生成 2) H は上の条件 (生成 1) を満たすもののうち最小のものである。すなわち、次のことが成り立つ。
《K が、M を部分集合として含む G の部分集合であれば、H は K の部分群になる。》

M で生成される G の部分群を $\langle M\rangle$ と書く。

例 3.2. $\mathbb{C}^\times$ の部分群として、次のことが成り立つ。

(1) $\langle -1\rangle=\{1,-1\}$.
(2) $\langle \sqrt{-1}\rangle=\{1,-1,\sqrt{-1},-\sqrt{-1}\}$.
(3) $\langle \omega\rangle=\{1,\omega,\omega^2\}$. ただし、$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.
(4) $\langle 2\rangle=\{2^n;n\in\mathbb{Z}\}$.
(5) $\langle 2,3\rangle=\{2^n3^m;n,m\in\mathbb{Z}\}$.

命題 3.3. 整数 m に対して、 m で生成される $(\mathbb{Z},+)$ の部分群は $m\mathbb{Z}$ に一致する。

命題 3.4. $(\mathbb{Z},+)$ の部分群 H で、 0 でないものをとってきたとする。すると、

(1) H の元で、正で、最小のものが存在する。(それを n_0 とおこう。)
(2) H は n_0 で生成される。

定理 3.5. $\{0\}$ 以外の $(\mathbb{Z},+)$ の部分群は $n\mathbb{Z}$ (n は正の整数) の形のものに限る。(逆に、もちろん、 $n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群である。)

命題 3.6. 群 G の元 g に対して、g で生成される G の部分群は

$$\langle g\rangle=\{g^n;n\in\mathbb{Z}\}$$

に一致する。これはもう少し詳しく見ると次の 2 つの場合がある。

(1) g^n ($n\in\mathbb{Z}$) はすべて相異なる。
(2) ある正の整数 k があって、$g^k=e$ が成り立つ。そのようなもののうち、最小のものを g の**位数**と呼ぶ。

(1) の場合には、 g の位数は無限であるという。

命題 3.7. 群 G の元 g の位数 k が有限なら、
整数 l が $g^l=e$ を満たすのは、$l\in k\mathbb{Z}$ のときで、その時に限る。