# 代数学 IA NO.1 要約

一学期の目標

$\boxed{\text{群の準同型定理を理解する。}}$

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 代数系, 特に, 群。

代数系とは、集合の上に演算を載せたものである。

載せる演算の種類によっていろいろなものができる。

| 演算 | 演算の記号 | 代数系 |
|---|---|---|
| 和, 差 | $+, -$ | 加群 |
| 積 | $\times$ | 半群 |
| 積, 商 | $\times, \bullet^{-1}$ | 群 |
| 和, 差, 積 | $+, -, \times$ | 環 |
| 和, 差, 積,0 以外での商 | $+, -, \times, \bullet^{-1}$ | 体 |

**定義 1.1.** 集合 $S$ 上の 2 項演算とは、写像 $S \times S \to S$ のことである。

**例 1.2.** 次のものは $\mathbb{Z}$ 上の二項演算である。

(1) $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{Z}$ (加法)
(2) $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto ab \in \mathbb{Z}$ (乗法)
(3) $- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto a - b \in \mathbb{Z}$ (減法)
(4) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto (a + 2b) \in \mathbb{Z}$

○ 1 項演算、3 項演算、4 項演算等も同様に定義される。例えば、

**例 1.3.** (1) $\mathbb{Z} \ni n \mapsto -n \in \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ 上の 1 項演算である。
(2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ni (a, b, c) \mapsto \frac{a+b+c}{3} \ni \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上の 3 項演算である。

**定義 1.4** (群の定義)**.** 集合 $G$ が群であるとは、
(群 0) 二項演算 $G \times G \ni (x, y) \mapsto x \circ y \in G$ が定義されていて、次の条件を満たすときに言う。

(群 1) その演算は結合法則を満たす。

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad (\forall x, y, z \in G)$$

(群 2) $G$ には単位元 (普通 $e$ と書かれる) が存在する。すなわち、ある $G$ の元 $e$ があって、

$$e \circ x = x, \quad x \circ e = x \quad (\forall x \in G)$$

がなり立つ。

(群 3) $G$ の各元には逆元がある。すなわち、$G$ の任意の元 $x$ に対して、$G$ のある元 $y$ が存在して、

$$x \circ y = e, \quad y \circ x = e$$

がなりたつ。

群の定義において、集合 $G$ を決めただけではどんな演算を考えているのか明確でないので、正確には、組 $(G, \circ)$ を群と呼ぶ。

**例 1.5.** 次の $G$ はそれぞれ通常の乗法を演算とする群である。

(1) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. (これを $\mathbb{Q}$ の 乗法群 $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ と呼ぶ。)
(2) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

**例 1.6.** 次の $(G, \circ)$ はそれぞれ乗法を演算とする群 でない。

(1) $G=\mathbb{Z}$, $x\circ y=xy$.
(2) $G=\mathbb{Q}$, $x\circ y=xy$.

**定義 1.7.** 演算が可換で、かつ $+$ 記号で書かれるような群のことを加法群と呼ぶ。加法群は加群とも呼ばれる。

**例 1.8.** $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 等はそれぞれ (通常の加法に関して) 加法群である。$2\mathbb{Z}$ も加法群である。

加法群も群の一種に過ぎないことに注意。$\mathbb{Z}$ の加法群のことを $(\mathbb{Z},+)$ と書く。

**例 1.9.** $\{-1,0,1\}$ は (通常の加法に関して) 群ではない。

問題

(I) $\mathbb{Z}\setminus\{-100\}$ は加法に関して群をなすだろうか、理由を挙げて述べなさい。
(II) $\mathbb{Z}$ に、演算 $\circ$ を
$$x\circ y=x+y+3$$
で定義する。このとき、$(\mathbb{Z},\circ)$ は群であるか、理由をつけて答えなさい。

● http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi にこのプリントを提供する.