代数学演習 I 問題 NO.8

今回（No.8）は、「環」と言えば単位元を持つ結合的環のことを指すことにします。また、「準同型」は単位元を保つものだけを考えることにします。まずはいまさらながら感の準同型定理の証明から:

問題 8.1. (各 1) 環の準同型 $f : R \to S$ が与えられた時、

(1) $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ は R のイデアルであることを証明せよ。
(2) $x, y \in R$ に対して、$f(x) = f(y)$ と $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$ とは同値であることを証明せよ。
(3) $\mathrm{Image}(f)$ は S の部分環であることを証明せよ。
(4) 環として $R/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Image}(f)$ であることを示しなさい。

以下の問題では、「環」と言えば可換な環ののみを指すことにします。

問題 8.2. (各 1) 次の各々の環の同型を準同型定理を用いて証明しなさい。

(1) $\mathbb{Q}[X]/(X-6) \cong \mathbb{Q}$.
(2) $\mathbb{Z}[X]/(X+7) \cong \mathbb{Z}$.
(3) $\mathbb{C}[X]/(X-\pi) \cong \mathbb{C}$ (ただし π は円周率。)
(4) $\mathbb{F}_{11}[X]/(X-4) \cong \mathbb{F}_{11}$.

問題 8.3. 一般に、体 K 上の一次式 $p(X) = aX + b$ $(a, b \in K,\ a \neq 0)$ に対して、$K[X]/(p(X)) \cong K$ であることを示しなさい。

問題 8.4. 前問で、K が体であるという仮定をやめて K が一般の可換環であると仮定した場合には、 $K[X]/(p(X))$ は K と同型とは限らないことを示しなさい。

問題 8.5. $\mathbb{Q}[\sqrt{6}] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2-6)\mathbb{Q}[X]$ を示しなさい。

問題 8.6. 有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分集合 $\mathbb{Z}[1/5] = \{m/5^n; m \in \mathbb{Z}; n = 0, 1, 2, \dots,)$ は $\mathbb{Q}$ の部分環になることを示しなさい。

問題 8.7.

$$(5X-1)\mathbb{Q}[X] \cap \mathbb{Z}[X] = (5X-1)\mathbb{Z}[X]$$

を示しなさい。

問題 8.8.

$$\mathbb{Z}[1/5] \cong \mathbb{Z}[X]/(5X-1)\mathbb{Z}[X]$$

を示しなさい。

問題 8.9. 環 R のイデアル I と変数 X について、次の同型を示しなさい。

$$R[X]/IR[X] \cong (R/I)[X]$$

問題 8.10. 環 S の部分環 R と S のイデアル I について、

$$R + I = \{r + a; r \in R, a \in I\}$$

は、S の部分環となることを示しなさい。

問題 8.11. 環 S の部分環 R と S のイデアル I について、

$$S = R + I, \quad R \cap I = 0$$

が成り立てば、$S/I \cong R$ となることを示しなさい。

問題 8.12. 環準同型 $f : R \to S$ について、J が S のイデアルであれば、 $f^{-1}(J)$ は R のイデアルとなることを示しなさい。

問題 8.13. (各 1) 環準同型 $f : R \to S$ について、

(1) I が R のイデアルのとき、$f(I)$ は S のイデアルとなりますか? (ならなければ反例を挙げてください。)
(2) f が全射ならどうですか?

問題 8.14. K を体とします。このとき同型 $K[X,Y]/XK[X,Y] \cong K[Y]$ を示しなさい。

問題 8.15. 環 S とその部分環 R とについて、P が S の素イデアルならば、$P \cap R$ は R の素イデアルであることを示しなさい。「素イデアル」を「極大イデアル」にかえるとどうか?

問題 8.16. 環 R のイデアルに I について、 $I \cdot I$ を I^2 と略記します。J も R のイデアルで、$I + J = R$ となれば、$I^2 + J^2 = R$ となることを示しなさい。

問題 8.17. 整域 R の元 a, b について、次を示しなさい。

(1) $a|b$ である (すなわち、ある $c \in R$ があって、 $b = ac$ と書ける) ことと、$aR \subset bR$ とは同値である。
(2) a と b とが同伴である (すなわち、$a|b$ かつ $b|a$ が成り立つ) ことと、$aR = bR$ とは同値である。

以下は初等整数論からの補遺です。

問題 8.18. 正の整数 a, b の最大公約数が 1 であるための必要十分条件は、

$$al + bm = 1$$

を満たす 整数 l, m が存在することである。これを示しなさい。

問題 8.19. (この問題に限っては前問が解けている、いないに拘わらずその結果を使ってよい。(いずれにせよ講義でやるから。)) 前問を用いて、a, b が互いに素ならば、 a^2 と b^2 も互いに素であることを示しなさい。

問題 8.20. 前問を用いて、a, b が互いに素ならば、 a^2 と b^2 も互いに素であることを示しなさい。

問題 8.21. 前問をもちいて、$\sqrt{6}$ は無理数であることを証明しなさい。ただし、素因数分解の一意性の知識を用いないで証明すること。

問題 8.22. 前問と同じ前提条件で、一般に、平方数でない (つまり、$\{n^2; n \in \mathbb{Z}\}$ の元ではない) 整数 m にたいして、$\sqrt{m}$ は無理数であることを証明しなさい。

問題 8.23. 整数係数の多項式

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \qquad (a_j \in \mathbb{Z}\ (j = 0, 1, 2, \ldots, n), \quad a_n \neq 0)$$

について、p の、0 でない有理根 r があったとする。すなわち、$p(r) = 0$ とする。r を既約分数 $\frac{l}{m}$ と書いたとき、

(1) r の分子 l は p の定数項 a_0 の約数であることを示しなさい。
(2) r の分母 m は p の最高次の係数 a_n の約数であることを示しなさい。