代数学演習 IB 問題 NO.6

環の準同型定理編

問題 6.1 (全部で 1 点)**.** $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への次の写像はいずれも環準同型でないことを示しなさい。

(1) $f_1(x) = (x+1)/2$
(2) $f_2(x) = x^2$
(3) $f_3(x) = 2x - 1$
(4) $f_4(x) = x^3 + x^2 - x$

問題 6.2. (全部で 1) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への環準同型 φ があったとする。

(1) $\varphi(2), \varphi(3)$ を求めよ。
(2) 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ にたいして、 $\varphi(k) = k$ であることを示しなさい。
(3) $\varphi(k) = k \qquad (\forall k \in \mathbb{Z})$ を示しなさい。

問題 6.3. (全部で 1) $\mathbb{Z}[X]$ から $\mathbb{Z}$ への環準同型 φ で、$\varphi(X) = 3$ をみたすものがあったとする。

(1) $\varphi(k) = k \qquad (\forall k \in \mathbb{Z})$ を示しなさい。
(2) $\varphi(5X), \varphi(X^3)$ をそれぞれもとめなさい。
(3) $\varphi(X^3 + 5X + 7)$ をもとめなさい。
(4) $p(X) = \sum_j a_j X^j$ にたいして、$\varphi(p)$ をもとめなさい。

問題 6.4. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.5. $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}$ への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.6. $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.7. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

問題 6.8. (各 1 点) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への環準同型 f が与えられているとするとき、

(1) $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ であることを示しなさい。
(2) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ であることを示しなさい。
(3) f は連続であることを示しなさい。
(4) $f = \mathrm{id}$ (恒等写像) であることを示しなさい。

問題 6.9. $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への準同型写像の例を二つ (以上) 挙げなさい。(二つはかなり簡単に見つかるが、三つめを挙げるのは超難問である。それゆえ二つ答えるのが無難である。)

以下この演習では、とくに断らないで $[?]_n$ で ? の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ でのクラスを表すことがある。文脈でわかると思うので、いちいち書かないが、注意していただきたい。

問題 6.10. $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f([x]_{20}) = [x]_5 \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

で定める。このとき、f はうまく定義されていて、環準同型であることを示しなさい。

問題 6.11. $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ への写像 f を
$$f([x]_{31}) = [x]_7 \qquad (x \in \mathbb{Z})$$
で定めたいが、f はうまく定義されていて、環準同型であるだろうか。理由をつけて答えなさい。

問題 6.12. 体 K から 環 R への準同型写像は必ず単射であることを示しなさい。

問題 6.13. 環準同型写像 $f : \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \ni [x]_{18} \mapsto [x]_6 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ を考える。一行目に $x \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ (18 個), 二行目に $f(x)$ が並んだような表を作り、$\mathrm{Ker}(f)$, $f^{-1}([1]_6)$, $f^{-1}([2]_6)$ をそれぞれ求めなさい。

問題 6.14. 環準同型写像 $f : \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \ni [x]_{20} \mapsto [x]_4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を考える。一行目に $x \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ (18 個), 二行目に $f(x)$ が並んだような表を作り、$\mathrm{Ker}(f)$, $f^{-1}([1]_6)$, $f^{-1}([2]_6)$ をそれぞれ求めなさい。

問題 6.15. 行列
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$
にたいして、
$$\varphi : \mathbb{C}[X] \to M_n(\mathbb{C})$$
を
$$\varphi(p) = p(A)$$
で定義する。このとき、

(1) $\varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)$ を求めなさい。
(2) $\varphi(X^7 + X + 1)$ をもとめなさい。
(3) φ は環準同型であることを示しなさい。
(4) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ を求めなさい。
(5)
$$\mathrm{Image}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{C} \right\}$$
であることを証明しなさい。