

論理と集合要約 NO.8

写像を理解するときに、「ホテルヒルベルト」のような解釈もできるのです。この解釈では、全射は、「空き室がないこと」に対応し、単射は、「各部屋個室」(単射でないことは、相部屋が生じること)に対応するのです。全射や単射の存在は、始集合と終集合の元の多さと関係しているのです。

第8回目の主題： 写像、合成写像

写像の合成

定義 8.1. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとする。このとき、 f, g の合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義する。

次の命題は簡単ではあるが有用である。実用上はこのような命題があることだけ記憶しておいて、その都度頭の中で確かめるのがいいだろう。

命題 8.2. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとする。このとき、次がなりたつ。

- (1) f, g がともに単射ならば $g \circ f$ も単射である。
- (2) f, g がともに全射ならば $g \circ f$ も全射である。
- (3) f, g がともに全単射ならば $g \circ f$ も全単射である。
- (4) $g \circ f$ が単射ならば、 f は単射である。
- (5) $g \circ f$ が全射ならば、 g は全射である。

定義 8.3. 集合 X に対して、写像 $X \ni x \mapsto x \in X$ を X の恒等写像といい、 id_X で表す。

命題 8.4. 集合 X, Y と、写像 $f: X \rightarrow Y$ および $g: Y \rightarrow X$ が与えられているとする。このとき次のことはすべて同値である。

- (1) f は全単射であって、 g は f の逆写像である。
- (2) $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$.
- (3) f は全射であって、 $g \circ f = \text{id}_X$.
- (4) f は単射であって、 $f \circ g = \text{id}_Y$.

上の命題も、(1) \Leftrightarrow (2) 以外はその都度確認すれば良い。(1) \Leftrightarrow (2) は特に重要である。

問題 8.1. $X = \mathbb{R}_{\geq 0}, Y = \mathbb{R}$ とおく。写像 $f: X \ni x \rightarrow \sqrt{x} \in Y$ と $g: Y \ni x \rightarrow x^2 \in X$ にたいして、

- (1) $g \circ f = \text{id}_X$ であることを示しなさい。
- (2) $f \circ g \neq \text{id}_Y$ であることを示しなさい。
- (3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

問題 8.2. $X = \mathbb{C}[t]$ (複素数係数の t を変数とする多項式の全体のなす集合), $Y = \mathbb{C}[t]$ とおく。写像 $f: X \ni p \rightarrow \int_0^t p dt \in Y$ と $g: Y \ni p \rightarrow \frac{d}{dt} p \in X$ にたいして、

- (1) $g \circ f = \text{id}_X$ であることを示しなさい。
- (2) $f \circ g \neq \text{id}_Y$ であることを示しなさい。
- (3) f, g はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。