代数学 II 要約 NO.13

第 13 回目の主題 : $\boxed{\text{Hom}}$

環 A 上の加群の準同型とは、和と「スカラー倍」(A の元による作用) を保つような写像のことをいうのでした。

定義 13.1. 環 A 上の加群 M, N があ与えられたとする。M から N への A-加群準同型の全体を

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)$$

で書き表す。

命題 13.2. 環 A 上の 加群 M, N が与えられたとする。このとき:

(1) $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は「値ごとの和」を考えることにより加群の構造を持つ。
(2) $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ は「値ごとの和」を和、「写像の合成」を積として考えることにより（一般には非可換な) 環になる。この環を $\mathrm{End}_A(M)$ とも書く。
(3) A が可換環ならば、 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ も「値ごとのスカラー倍」を考えることにより A 加群の構造を持つ。

(参考) 上の事実の一般化として、A が非可換の時には次のようなことが成り立つ。

命題 13.3. 環 A 上の 加群 M, N が与えられたとする。このとき:

(1) $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は $\mathrm{End}_A(N)$-加群と見ることができる。
(2) $\mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}$ で、 $\mathrm{End}_A(M)$ の積を逆順にしたものを表すことにすると、$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は $\mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}$-加群の構造を持つ。
(3) A の中心 $Z(A) = \{z \in A; \forall x \in A(xz = zx)\}$ は A 部分感であり、 $\forall z \in Z(A)$ に対し、「z 倍作用」

$$\lambda_z : m \mapsto zm$$

は $\mathrm{End}_A(M)$ の元を与える。
(4) 対応

$$Z(A) \ni z \mapsto \lambda_z \in \mathrm{End}_A(M)$$

は環準同型絵ある。

例 13.4. $\mathbb{Z}$-加群の Hom の例:

(1) $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = 0$
(2) $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0.$
(3) $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) = 0.$

命題 13.5. 環 A 上の任意の元 a と任意の A-加群 M について、次のことが成り立つ。

$$\mathrm{Hom}_A(A/Aa, M) \cong \{m \in M; a.m = 0\}$$