代数学 II 要約 NO.5

第5回目の主題 : $\boxed{\text{有限生成加群と自由加群の間の準同型}}$, $\boxed{\text{PID 上の有限生成加群の構造 (1)}}$

◎有限生成加群 (再掲)

定義 5.1. A-加群 M が有限個の元で生成されるとき、M を A 上の有限生成加群と呼ぶ。

例 5.2. $\mathbb{R}^2$ は 有限生成 $\mathbb{R}$-加群だが、$\mathbb{Z}$-加群としては有限生成ではない。

補題 5.3. A-加群 M が有限個の元 $m_1, m_2, \dots, m_s$ で生成されるとき、

(1) 写像

$$\varphi : A^s \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{s} a_i m_i$$

は A-加群の全射準同型である。

(2) $M \cong A^s / \operatorname{Ker}(\varphi)$.

** 一般に、M の A-加群としての生成元 $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとれば、全射 A-準同型

$$\varphi : A^{\oplus \Lambda} \ni (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \sum_{\lambda} a_\lambda m_\lambda$$

が定義されて、M は自由加群の剰余加群として表現されることが分かる。**

自由加群から一般の加群への準同型は次のように「生成元の行き先」で定まる。

命題 5.4. 環 A 上の加群 M にたいして、

(1) M の元 $m_1, m_2, \dots, m_k$ が与えられたとき、$A^{\oplus k}$ から M への A-準同型 φ が

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^{k} a_j . m_j$$

により定まる。

(2) $A^{\oplus k}$ から M への A-準同型は、上のような形のものに限る。

系 5.5. 環 A 上の加群 M にたいして、M が k 個の元 $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ で生成されるならば、

(1) 上記の命題のようにして全射 A-準同型 $\psi : A^{\oplus k} \to M$ が定まる。

(2) さらに、 $\operatorname{Ker}(\psi)$ も有限個の元で生成されるならば、適当な A 準同型

$$f : A^{\oplus k'} \to A^{\oplus k}$$

があって、M は f の余核 $A^{\oplus k} / \operatorname{Image}(f)$ と同型になる。(このような M のことを有限表示をもつ A 加群という。)

うえのことは、M が適当な有限性の条件を満足すれば (つまり、有限表示を持てば)、M は上のような準同型の余核として得られることを示している。

命題 5.6. A は可換環であるとする。このとき、$A^{\oplus k}$ から $A^{\oplus l}$ への任意の A-準同型 φ は、

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & & & \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

と書ける。

PID 上の有限生成加群の構造 (1)

次のことをこの講義からしばらくの間の目標にしよう。

定理 5.7. PID A 上の有限生成加群は必ず $A/(a)$ の形の加群の直和である。

言葉の確認から:

可換環 A は、0 以外に零因子を持たないとき**整域**と呼ばれるのでした。

定義 5.8. 整域 A が **PID** (principal ideal domain, 主イデアル整域) であるとは、A の任意のイデアルがひとつの元で生成されるときにいう。

「余りを許した割り算」が必ずできるような整域のことを**ユークリッド整域**と呼ぶのでした。

次の定理は代数 IB で学習済みのことと思います。

定理 5.9. ユークリッド整域は必ず PID である。

定理 5.10. PID はかならず **UFD** である。すなわち、素因数分解の一意性が成り立つ。

これらの諸定理から、次のことがすぐに分かる。

命題 5.11. PID A 上の加群が、ひとつの元で生成されるなら、それは A/Aa ($\exists a \in A$) の形の加群と同型である。

補題 5.12. PID A 上の加群 M が 2 つの元 m_1, m_2 で生成されているとし、

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 = 0$$

なる関係式が成り立っていたとする。このとき、

次のような m_1', m_2' が存在する。

(1) m_1', m_2' は M の生成元である。

(2) $dm_1' = 0$. (ただし d は a_1 と a_2 の最大公約元。)

命題 5.13. 可換 PID A の元 a, b に対して、イデアル $Aa + Ab$ はある単項イデアル Ad と等しい。このとき、ある a', b', x, y が存在して、次の二式が成り立つ。

(1) $a = a'd, \quad b = b'd.$

(2) $a'x + b'y = 1.$

とくに、

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -y & x \end{pmatrix}$$

は $\mathrm{SL}_2(A)(\subset \mathrm{GL}_2(A))$ の元である。

命題 5.14. 可換 PID A のイデアルの増加列

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \dots$$

は必ず有限で止まる。すなわち、ある N があって、

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots$$

が成り立つ。