

代数学 II 要約 NO.2

第 2 回目の主題：環の上の加群の定義 (2)

環と、その上の加群について、前回は「フォーマルな」定義を述べた。実際には、次のことをわきまえていればそれほど間違えることはない。

- (1) 環 A とは、その中で足し算、引き算、かけ算ができるような集合である。
- (2) A -加群 M とは、その中で足し算、引き算、および A の元による作用 (「スカラー倍」) ができるような集合である。

例 2.1. 環 A が与えられたとき、正の整数 n にたいし、 A の元を n 個縦に並べた「ベクトル」の全体 A^n は A -加群とみなせる。具体的には、

- (1) 和

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{複号同順,} \\ \forall x_1, \dots, \forall x_n \in A, \\ \forall y_1, \dots, \forall y_n \in A. \end{array} \right)$$

- (2) 作用 (スカラー倍)

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \forall a \in A, \\ \forall x_1, \dots, \forall x_n \in A. \end{array} \right)$$

上の例で $n = 1$ のときを考えれば、 A 自身も A -加群とみなせることがわかる。

定義 2.2. 上の A^n のことを A 上の (階数 n の) 自由加群と呼ぶ。

補題 2.3. 環 A 上の加群 M に対して、つぎのことがなりたつ。

- (1) M のゼロ元は唯一つである。これを 0_M (もしくは単に 0) と書く。
- (2) A の任意の元 a にたいして、 $a \cdot 0_M = 0_M$ がなりたつ。
- (3) M の各元 x にたいして、 x の和に関する逆元 (マイナス元) は唯一つ存在する。これを $-x$ と書くのであった。
- (4) A の任意の元 a と、 M の任意の元 m にかんして、

$$(-a) \cdot (-m) = a \cdot m$$

が成り立つ。

「 A 加群 M 」を思いうかかべるとき、はじめはベクトル空間をイメージしても良いだろう。ただし、つぎのことがベクトル空間とは決定的に異なる。

- (1) 環 A の積は可換とは限らない。(これは A が可換環であるような状況ならば回避できる。)
- (2) 環 A の元で割れるとは限らない。

というわけで、加群を学ぶときには、ベクトル空間の性質を思い出しつつ、加群の場合の違いを意識しながら学ぶと良いだろう。

次の定義はベクトル空間の間の線型写像の類似と考えて良い。

定義 2.4. M_1, M_2 が A -加群のとき、写像 $f : M_1 \rightarrow M_2$ が A -準同型 (A -加群としての準同型) であるとは、つぎの条件が満足されるときに言う。

$$(\text{Hom1}) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(\text{Hom2}) \quad f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

定義 2.5. A -加群 M にたいして、 N が M の A -部分加群であるとは、次の2条件が同時に満足されているときに言う。

(SM1) N は M の部分集合である。

(SM2) N はそれ自身 A -加群の構造をもつ。

(SM3) 包含写像 $j : N \hookrightarrow M$ は A -加群の準同型である。

命題 2.6. A -加群 M と M の部分集合 N にたいして、次の2条件は同値である。

(1) N は M の A -部分加群である。

(2) N は和、差、 A の元による作用について閉じている。

例 2.7. $3\mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} の \mathbb{Z} -部分加群である。

もっと一般に、

定義 2.8. 環 A にたいして、 A 自身を A -加群とみなしたものの部分加群 J を A の左イデアルと呼ぶ。別の言い方をすると、 A の左イデアル J とは、 A の部分集合であって、次の条件を満たすもののことである。

$$(\text{LI1}) \quad 0_A \in J.$$

$$(\text{LI2}) \quad x, y \in J \implies x + y \in J, \quad x - y \in J.$$

$$(\text{LI3}) \quad a \in A, x \in J \implies ax \in J.$$

A が可換環のときには、左イデアルとイデアルは同じものである。

定義 2.9. A -加群 M とその A -部分加群 N が与えられているとする。このとき M の N による商加群 M/N は自然に A -加群の構造をもつ。

問題 2.1. \mathbb{Z} -加群 \mathbb{Z} の \mathbb{Z} -部分加群 $3\mathbb{Z}$ による剰余加群 $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を考える。 M の各元 x は「11 で割る」ことができること、すなわち、

$$\forall x \in M \exists y \in M; \quad 11 \cdot y = x$$

を示しなさい。