論理と集合要約 NO.10

第 10 回目の主題：$\boxed{\text{写像による集合の像、逆像}}$

定義 10.1. (再) 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき、

(1) X の部分集合 A に対して、その f による**像** (**順像**とも言う) $f(A)$ を

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

で定義する。

(2) Y の部分集合 B に対して、その f による**逆像** $f^{-1}(B)$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

により定義する。

$f(A)$ は、「A の元を f で送ったモノの全体」、$f^{-1}(B)$ は 「f で送って B に入るモノの全体」と唱える癖をつけておくと扱い易い。

f^{-1} は (見かけによらず) 集合論的には使いやすい。つまり、f^{-1} はさまざまな集合算と可換である。

命題 10.2. 写像 $f : X \to Y$ に対して、次のことを示しなさい。

(1) 任意の $B_1, B_2 \subset Y$ に対して、$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(2) 任意の $B_1, B_2 \subset Y$ に対して、$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(3) 任意の $B \subset Y$ に対して、$f^{-1}(\complement B) = \complement(f^{-1}(B))$.
(4) Y の無限個の部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、

$$f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \qquad f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).$$

f の像については一部の集合算と可換ではない。詳しくは集合論の本を見ればよいが、さしあたっては実例が現れた時にその都度考えるぐらいで十分だろう。次の諸問題も参照のこと。

問題 10.1. $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 20\}$, $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ とおき、$f : X \to Y$ を
$f(x) =$(x を 5 で割った余り)
で定義する。このとき、

(1) $A_1 = \{0, 1\}$ とおく。$f(A_1)$ を求めよ。
(2) $A_2 = \{0, 11\}$ とおく。 $f(A_2)$ をもとめよ。
(3) $f(A_1 \cap A_2)$ をもとめよ。(この例の場合、 $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ だろうか?)
(4) $f(A_1 \cup A_2)$ をもとめよ。(この例の場合、 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ だろうか?)
(5) $B_1 = \{0, 3\}$ とおく。 $f^{-1}(B_1)$ をもとめよ。
(6) $B_2 = \{0, 5\}$ とおく。 $f^{-1}(B_2)$ をもとめよ。
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ をもとめよ。(この例の場合、 $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ だろうか?)
(8) $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ をもとめよ。(この例の場合、 $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ だろうか?)

問題 10.2. $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to x \in \mathbb{R}$ にたいして、つぎの各問に答えよ。

(1) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \le 1 \text{ and } |y| \le 1\}$ にたいして、$f(A_1)$ を求めよ。
(2) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y-3)^2 \le 1\}$ にたいして、$f(A_2)$ を求めよ。
(3) $f(A_1 \cap A_2)$ を求め、グラフの概形を描け。
(4) $f(A_1) \cap f(A_2)$ を求め、グラフの概形を描け。
(5) $f(A_1 \cup A_2)$ を求め、グラフの概形を描け。

問題 10.3. $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x, y) \in \mathbb{R}$ にたいして、

(1) $f^{-1}(\{(0, 0)\})$ を求め、グラフの概形を描け。
(2) $f^{-1}(\{1, 1)\})$ を求め、グラフの概形を描け。
(3) $f^{-1}(\{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\})$ を求め、グラフの概形を描け。
(4) $f^{-1}(\{(x, y) || x + y| \le 1\})$ をもとめ、グラフの概形を描け。

◎直積集合

次のことは今回の本題とは離れるが、説明し損なったのでここで定義を書いておく。

一般に, 元 x と 元 y を順序をつけて並べたもの (x,y) を x,y のペア (組) と呼ぶ。x,y が実数の場合には開区間と全く同じ記号になってしまっていて、紛らわしいのだが、区別するときには「区間 (x,y)」,「ペア (組) (x,y)」と前につけると良いだろう。

定義 10.3. 集合 X,Y に対して、X の元と Y の元のペアの全体の集合

$$\{(x,y); x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の**直積集合**といい、 $X \times Y$ で書き表す。

もっと一般に、集合族 $\{X_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$ に対して、

$$\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}; x_\lambda \in X_\lambda\}$$

を $\{X_\lambda\}$ の**直積集合**といい、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で書き表す。