論理と集合要約 NO.4

第 4 回目の主題：$\boxed{\text{集合の和集合や共通部分}}$

まずは論理の復習

問題 4.1. $\forall x > 0(\exists y \in \mathbb{R}(x > y > 0))$ は真だろうか、偽だろうか。理由をつけて述べなさい。

問題 4.2. $\exists y > 0(\forall x \in \mathbb{R}(x > y > 0))$ は真だろうか、偽だろうか。理由をつけて述べなさい。

論理復習ここまで

集合の関係を論理で述べることもよくある。

問題 4.3.

$$\forall x \in 5\mathbb{Z}\text{にたいして } (x \in 3\mathbb{Z}) \text{ がなりたつ}$$

は正しいだろうか?

集合と論理とは裏腹の関係にあるのであった。論理の $\forall$ や $\exists$ に対応する集合論的な概念も存在する。

定義 4.1. 正の整数の全体 $\mathbb{Z}_{>0}$ の一つ一つの元 n に対して集合 S_n が与えられているとき、集合の**列** $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているという。

同様に、集合 Λ の一つ一つの元 λ に対して集合 S_λ が与えられたとき、集合の**族** $\{S_\lambda\}_{\lambda\Lambda}$ が与えられたという。Λ のことをこの族の**添字集合**と呼ぶ。

もちろん集合列は集合族の特別な場合である。$\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ のことを $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ のように書いているのである。

定義 4.2. 集合族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ にたいして、その和集合と共通部分を

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda = \{x; \forall\lambda \in \Lambda \quad (x \in S_\lambda)\}$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda = \{x; \exists\lambda \in \Lambda \quad (x \in S_\lambda)\}$$

により定義する。

集合列については、その共通部分

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} S_n$$

のことを

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

のごとく書くことも多い。和集合も同様。

問題 4.4.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \emptyset$$

であることを示しなさい。右辺の記号は**空集合**といって、元をひとつも持たない集合のことをさす記号である。

問題 4.5.

$$\bigcap_{\epsilon>0}(-\infty, 1+\epsilon) = (-\infty, 1]$$

であることを示しなさい。(左辺は堅苦しく書けば $\bigcap_{\epsilon\in\mathbb{R}_{>0}}(-\infty, 1+\epsilon)$ となるところであるが、上のように省略することが往々にしてある。)