

論理と集合要約 NO.3

第3回目の主題： 命題の否定と集合の補集合

and, or の否定

問題 3.1. $\text{not } (P \text{ and } Q)$ と $(\text{not } P) \text{ or } (\text{not } Q)$ とが同値であることを真理表を用いて示しなさい。

$P \implies Q$ の否定

$P \implies Q$ は $(\text{not } P) \text{ or } Q$ と同値であったので、その否定は $P \text{ and } (\text{not } Q)$ で与えられる。

\forall, \exists の否定

「すべての X の元 x について $P(x)$ が成り立つ」、すなわち

$$\forall x \in X (P(x))$$

の否定は「ある X の元 x について $P(x)$ が成り立たない」、すなわち

$$\exists x \in X (\text{not } P(x))$$

である。

同様に、

$$\exists x \in X (P(x))$$

の否定は

$$\forall x \in X (\text{not } P(x))$$

である。

実際の場面では、上の $x \in X$ のように x の制限を「集合の元か否か」で書くとは限らず、そのまま条件で書くことも多い。以下の例を参照のこと。

例 3.1.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \epsilon)$$

($x \mapsto x^2$ が $x = 3$ で連続であるという命題(真)) の否定は

$$() \quad \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (\text{not } (|x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \epsilon))$$

($x \mapsto x^2$ が $x = 3$ で連続でないという命題(偽)) である。このように、 \forall や \exists が散在する命題の否定は、

- 順序はそのままに、
- \forall と \exists を入れ替え、
- 最後の結論を否定する。

という手続きで得られる。

さらに、命題 () は、(「 $P \implies Q$ 」の否定が「 $P \text{ and } (\text{not } Q)$ 」であったことから、)

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (|x - 3| < \delta \text{ and } |x^2 - 9| \geq \epsilon)$$

と書き換えられる。

問題 3.2. つぎの各々の命題の否定をそれぞれ述べなさい。

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x + y = 0)$
- (2) $\forall x \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (xy \neq z)$

集合 X と S が与えられたとき、

$$X \setminus S = \{x; x \in X \text{ and } x \notin S\}$$

を X と S の差集合という。($X - S$ と書く流儀もあり、本講義の教科書ではそう書いてある。)

とくに、 S が X の部分集合の時、 $X \setminus S$ を X における補集合 とよぶ。 X が分かりきっているときには $\complement S$ と書くこともある。