微分積分学概論 AI 要約 NO.12

逆関数

定義 12.1. 実数のある区間 I で定義された関数 f が**狭義単調増加関数**であるとは、

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

をみたすときにいう。後半の $f(x_1) < f(x_2)$ を $f(x_1) \leq f(x_2)$ に置き換えることにより、**(広義) 単調増加関数**が定義される。

たまに狭義単調増加の条件を 「$f(x) < f(x+1)$」 と同じと勘違いしている学生を見かける。数列の時の類推であろうが、これはもちろん間違い。 $x(\sin(2\pi x)+2)$ を考えてみれば良い。(ウラ面の図も参照)

定理 12.2. f が閉区間 $[a,b]$ 上の狭義単調増加な連続関数であれば、

$$f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$$

の逆関数

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$$

が存在する。さらに、この f^{-1} は連続で、かつ狭義単調増加である。

例 12.3. 正の整数 n に対して、0 以上の実数を定義域とする関数 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は連続であり、狭義単調増加である。この関数は全射でもあるから、f は逆写像を持つ。この関数を

$$x \to \sqrt[n]{x}$$

と書く。つまり $y = \sqrt[n]{x}$ は $y^n = x$ を満たす唯一の正の実数である。

命題 12.4. 任意の正の実数 x に対して、

$$\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$$

がなりたつ。

Proof. $y = \sqrt[n]{x}$ とおくと、定義により、 $y^n = x$.

$$(y^k)^n = y^{kn} = (y^n)^k = x^k.$$

ゆえに、y^k は n 乗して x^k になる実数である。そのような実数は唯一つ、すなわち $\sqrt[n]{x^k}$ しかないのであるから、両者は等しい。 □

同様にして、次のことが分かる。

命題 12.5. 正の整数 a, b, c, d が $a/b = c/d$ を満たせば、任意の正の実数 x にたいして、

$$\sqrt[b]{x^a} = \sqrt[d]{x^c}$$

がなりたつ。

この命題がなりたつので、$\sqrt[b]{x^a}$ のことを $x^{\frac{a}{b}}$ と書いても誤解の恐れがない。

補題 12.6. 1 より大きい実数 x と有理数 q_1, q_2 にたいして、

$$q_1 < q_2 \implies x^{q_1} < x^{q_2}$$

が成り立つ。

問題 12.1. 次のことを示しなさい。

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall q \in \mathbb{Q}(|q| < \delta \implies |2^q - 1| < \epsilon)$$

逆関数の別の例を挙げよう:

例 12.7. この例では、高校で習う三角関数の知識は既知であるとする。

(1) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ は狭義単調増加連続関数である。その逆関数のことを $\arcsin(x)$ と書く。

(2) $[0, \pi] \ni x \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ は狭義単調減少連続関数である。その逆関数のことを $\arccos(x)$ と書く。

(3) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni x \mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加連続関数である。その逆関数のことを $\arctan(x)$ と書く。

$\arcsin, \arccos, \arctan$ はそれぞれ $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$ などと書くこともある。

参考までに定義 12.1 の下の注意で述べた $x(\sin(2\pi x) + 2)$ のグラフを載せておこう。