代数学 IB NO.5 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$《剰余環、素イデアル、極大イデアル》

前回までに、環 R の、そのイデアル I による剰余環について解説した。

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y \in I$$

なる判定法により R にクラス分けが入ること、R/I に加法、乗法が代表元のとり方によらずに定まることがポイントであった。たとえば $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ において、

$$\overline{153} \times \overline{493}$$

を計算するのに、$\overline{153 \times 493}$ を計算してもよいが、$\overline{153} = \overline{-1}, \overline{493} = \overline{-2}$ と代表元を取り換えてから $\overline{-1} \times \overline{-2}$ とやっても良いわけである。

....

次のことにも注意しておこう。

一般に、R/I とは環 R に I の各元 x に応じた関係式 $x = 0$ を新たに導入しててきた環である。例えば:

- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ とは、$\mathbb{Z}$ に新たな関係式 $6 = 0$ を導入してできた環である。
- $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2)$ とは、$\mathbb{Q}[X]$ に新たな関係式 $X^2 - 2 = 0$ を導入してできた環である。
- $\mathbb{Q}[X, Y]/(X^2 - 2, XY)$ とは、$\mathbb{Q}[X]$ に新たな関係式 $X^2 - 2 = 0, XY = 0$ を導入してできた環である。

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のような剰余環の性質は、いままで知っていた数のものとは若干異なる。そのことを説明するために、いくつかの言葉を用意しておく。

定義 5.1. 可換環 R の元 x が R の**零因子**であるとは、$xy = 0$ かつ $y \neq 0$ をみたす R の元 y が存在するときに言う。

定義 5.2. 可換環 R があたえられたとする。

(1) R に 0 以外の零因子がないなら、 R は**整域**であるという。
(2) R の 0 以外の元が R で可逆であるとき、R は**体**であるという。

もちろん、体は必ず整域である。

定義 5.3. 可換環 R のイデアル I $(R \neq I)$ について、

(1) R/I が整域であるとき、I は R の素イデアルであるという。
(2) R/I が体であるとき、I は R の極大イデアルであるという。

これらの名前の由来はもっとあとのほうで述べる。さしあたっては、次の例が重要である。

例 5.1.

(1) $\mathbb{Z}$ のイデアル $\{0\}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアルであるが、極大イデアルではない。
(2) 素数 p があたえられたとき、 $\mathbb{Z}$ のイデアル $p\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアルである。
(3) 正の整数 n が素数でないとき、$n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルではあるが、素イデアルではない。

定義 5.4. 素数 p が与えられたとき、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は (上の例に述べたように) 元の数が p の体である。この体を $\mathbb{F}_p$ と書く。