

## 代数学演習 I 問題 NO.11

### 復習的問題。

今回の問題は、以前まで出した問題を、数值的、もしくは組み合わせ的に複雑にしたものである。

問題 11.1. (各 1) 次の各々の環の同型を証明しなさい。

- (1)  $\mathbb{Q}[X, Y]/(X - 3, Y + 1) \cong \mathbb{Q}$ .
- (2)  $\mathbb{R}[X, Y]/(X - 2, Y) \cong \mathbb{R}$ .
- (3)  $\mathbb{C}[X, Y]/(X - \sqrt{-1}, Y - 7) \cong \mathbb{C}$ .

問題 11.2. (各 1) 次の  $\mathbb{Z}$  のイデアルを簡単にせよ。

- (1)  $(126221, 3483923)$
- (2)  $(8927, 17617, 26623)$
- (3)  $(6009829121, 11083254529, 11703651121)$
- (4)  $(11 \cdot 13 \cdot 17, 13 \cdot 17 \cdot 19, 11 \cdot 13 \cdot 19, 11 \cdot 17 \cdot 19)$

いずれの問題も、それらが gcd で生成されるイデアルであるという知識を用いずに、イデアルの定義に基づいて解くこと。

問題 11.3. (各 1) 次の  $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$  のイデアルを簡単にせよ。前問の注意と同様のことに注意すること。

- (1)  $(167 + 29\sqrt{-1}, 179 - 2\sqrt{-1})$
- (2)  $(138 - 7\sqrt{-1}, 201 - 17\sqrt{-1})$ .

問題 11.4. (各 1) (本問では、平方数以外の整数  $n$  に対して、 $\sqrt{n}$  が無理数であることを用いてよい。) 次の環としての同型を証明しなさい。

- (1)  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 5) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ .
- (2)  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ .
- (3)  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 3X - 5) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{29}]$ .
- (4)  $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 2X + 2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ .

問題 11.5. (各 1)(本問については、求め方も述べること。)

- (1)  $\mathbb{Z}/141\mathbb{Z}$  における 17 の逆元を求めよ。
- (2)  $\mathbb{Z}/112237\mathbb{Z}$  における 7078 の逆元を求めよ。
- (3)  $\mathbb{Z}/10^5\mathbb{Z}$  における 9 の逆元を求めよ。