微分積分学概論 AI 要約 NO.9

関数の極限値

定理 9.1. (再掲) 極限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ と $\lim_{x\to x_0} g(x)$ がともに存在すると仮定する。このとき、次のことが成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$.

(4) さらに、 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ と仮定すると、

$$\lim_{x\to x_0}(g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

関数の連続性の定義

定義 9.2. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であるとは、

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつときにいう。

極限の定義により、上の定義は次のように言い換えられる。

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0;\ (0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon)$$

$x = a$ の場合を考慮に加えると、次のような定理がなりたつことがわかる。

定理 9.3. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であることは、次の条件と同値である。

$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; (|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon)$

上の定理は「定理」ではあるが、連続性の定義における “$x = a$” の「例外的な扱い」を取り除いてむしろ自然な形をしている。そこでこの講義ではもっぱら連続性を確かめるには上の定理のほうを用いて判定することにする。実際には、関数 f が a の近くで定義されているという前提条件は強すぎる。そこで定義域についての条件をハッキリ記述して次のように定義しよう。

定義 9.4. $\mathbb{R}$ の部分集合 X で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が点 $a \in X$ において**連続**であるとは、

$$\boxed{(\star)\ \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; \forall x \in X(|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon)}$$

を満たすときに言う。

X を明示することにより、x の動く範囲に関する制限が明確になる。とくに X が $[a, a+\epsilon)$ のときを考えれば「右連続性」が自然に解釈できる。

問題 9.1. 正の数 $\epsilon > 0$ が与えられているとする。このとき、次のような 正の数 δ を見つけなさい。

$$\forall b\left(|b-5| < \delta \implies \left(b \neq 0 \text{ and } \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right| < \epsilon\right)\right)$$