微分積分学概論 AI 要約 NO.7

第７回目の主題：$\boxed{\text{級数}}$
数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、形式的な和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

のことを**級数**とよぶ。このように形式的に決めたからと言って、その「値」が何もせずに決まるわけではない。上の級数について、

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で定義される s_n のことをこの級数の**部分和**と呼ぶ。部分和からできた数列 $\{s_n\}$ が収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} s_n \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n\right)$$

で定義される数をこの級数の**和**と呼ぶ。

定義 7.1. 各 a_n が 0 以上の時の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のことを**正項級数**とよぶ。

有界な単調列は収束することから、次のことが分かる。

命題 7.2. 正項級数は、部分和からなる列が有界ならば必ず収束する。

正項級数に限らない級数については、絶対収束の概念が大事である。

定理 7.3. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば収束する。

定義 7.4. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、**絶対収束**すると呼ばれる。

「絶対収束する」というのはひとまとまりでひとつの数学用語である。あえて言えば「絶対値の和が収束している」という言葉の省略に近い。「絶対に収束する」という言葉とはまったく異なる。

定理 7.5. 絶対収束する級数は収束する。

例 7.6. 任意の実数 r に対して、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k$$

は収束する。この和を $\exp(r)$ と書く。

問題 7.1. 数列 $\{a_n\}$ が、任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、

$$|a_n| < \frac{1}{2^n}$$

を満たしているとする。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束することを示しなさい。