論理と集合要約 NO.13

写像 f があると定義域の集合は f の値によってクラス分けされるのでした。

....

第 13 回目の主題：$\boxed{\text{クラス分けと同値関係}}$

集合 X をクラス分けする際、「クラス分けの表」を書くのは面倒である。ほかの有力な手段として、「同値関係」を導入する方法がある。

問題 13.1. $X = \{1, 2, 3, \ldots, 31\}$, $Y = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, $f : X \to Y$ を
$f(x) =$(x を 7 で割った余り) で定義するとき、

(1) X の f に関するクラス分けの表を書きなさい。
(2) 1 と同じクラスになる X の元をすべて書きなさい。
(3) 2 と同じクラスになる X の元をすべて書きなさい。

一般に、集合 X にクラス分けが定まっているとき、$x \in X$ と同じクラスの元全体の集合を $[x]$ とか $\bar{x}$ と書く。(クラス分けがいろいろ出てきて区別が必要なときには、その都度 $[x]_1$ とか添字をつけて区別するのが良かろう) 字面だけみると、面白いことが起こる。例えば、上の例では

$$[1] = [8](= [15])$$

等々。

クラスは、元来は集合であるが、これを一つの元と改めて思い直すことにより、X の<u>クラス全体の集合</u>を考えることができる。これを X のこのクラス分けに関する**商集合**といい、X/(クラス分け) と書く。上の例では、

$$X/(\text{クラス分け}) = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}.$$

問題 13.2. 有限集合 $X = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ をいくつかの黒い線分で結ぶ。(ウラ面参照。) このとき、X の点を「黒い線づたいにつなげるか否か」でクラス分けすることができる。このクラス分けの表を書き、X/(クラス分け) の元の個数を書きなさい。

上の問題のように、「同じクラスか否か」のほうが先に分かっていれば、それをもとにクラス分けができる。これが同値関係の考え方である。

問題 13.3. $X = \{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$ (絶対値が 10 以下の整数) とする。このとき、

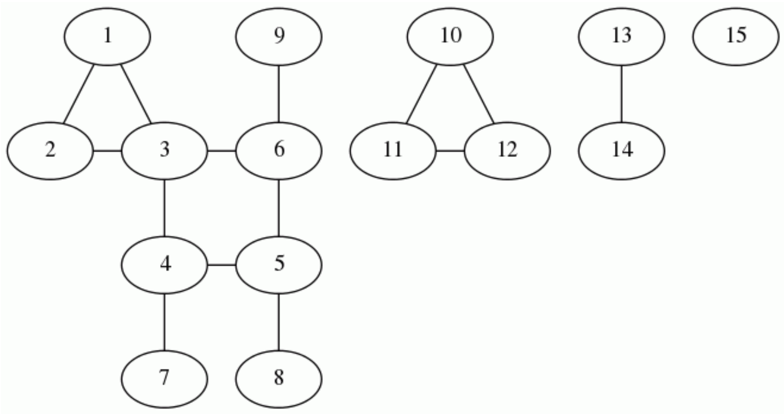
(1) $|x| = |y|$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、X をクラス分けしその表を書け。
(2) $x - y$ が 3 の倍数のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、X をクラス分けしその表を書け。
(3) $x - y$ が 5 の倍数のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、X をクラス分けしその表を書け。
(4) $x \geq y$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、X をクラス分けできるだろうか。
(5) $xy \geq 0$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、X をクラス分けできるだろうか。
(6) $xy > 0$ のとき (のみ) x と y が同じクラス、と決めることにより、X をクラス分けできるだろうか。

上で、x と y が同じクラス、といちいち書くのは面倒である。そこで、$x \sim y$ や $x \equiv y$ のような記号を用いて書くことが多い。いずれにしても、<u>勝手な規則で「同じクラス」を定めようとしても、うまく行かない。</u>

うまく行くために必要な事柄を集めたのが、**同値関係**である。

定義 13.1. $\sim$ が集合 X の同値関係であるとは、次のことを満たすときにいう。

(0) 任意の $a, b \in X$ に対して、$a \sim b$ か、そうでないかがはっきりと決まっている。
(1) (推移律) $a, b, c \in X$ が、$a \sim b, b \sim c$ を満たせば、$a \sim c$ も成り立っている。
(2) (反射律) 任意の $a \in X$ に対して、$a \sim a$ が成り立っている。
(3) (対称律) $a, b \in X$ が、$a \sim b$ を満たせば、$b \sim a$ も成り立っている。


1
9
10
13
15
2
3
6
11
12
14
4
5
7
8