論理と集合要約 NO.2

第 2 回目の主題：$\boxed{\text{集合}}$

◎ 論理 (続き)

論理においては、命題が大事であって、それらは基本的な命題から, and, or, not, $\forall$, $\exists$ を用いて作れるのでした。$\forall x P(x)$ は、「どんな x にたいしても $P(x)$ が成立する。」ということ、$\exists x P(x)$ は、「ある x にたいして $P(x)$ が成立する。」(どれかひとつの x について $P(x)$ が成立する。) という意味でした。

. . . .

問題 2.1. 「$x > 3$ ならば $x > 2$」は正しいだろうか。(論理の講義らしくもっと精密に書くなら: $\forall x \in \mathbb{R}(x > 3 \implies x > 2)$ だろうか?)

「P ならば Q」は、P が成り立つときには、Q が成り立つことを主張している。では P が成り立たないときにはどうだろうか。日常生活では場合に応じて次の二つの意味に用いている。

(1) P でないときは関知しない。(P が真でも、偽でもどちらでもよい。)
(2) P でないときは Q でない (と言外に言っている)。

曖昧さを避けるため、数学では「ならば」($\implies$) を前者の意味でのみ用いる。

「P または Q 」(P or Q) についてもこれは P と Q のどちらかが正しいという主張であるが、日常生活では場合に応じて次の二つの意味に用いている。

(1) P と Q の両方が正しいことも許す。
(2) P と Q の両方が正しいのは (言外に) 許さない。

曖昧さを避けるため、数学では「または」(or) を前者の意味でのみ用いる。

極論すれば、論理とは、ある仮定 P をおいたときに、正しい推論規則を用いて結論 Q を導き出すことにより、 $P \implies Q$ を証明することに他ならない。

P と Q の真理値がいつでも一致するとき、 P と Q とは**同値**であるといい、 $P \Leftrightarrow Q$ と書く。これは 「$(P \implies Q)$ かつ $(Q \implies P)$」 と同じことである。

問題 2.2. $P \Leftrightarrow Q$ と $(P \implies Q)$ and $(Q \implies P)$ の真理値が一致することを、真理表を用いて示しなさい。

日常用いているいくつかの基本的な推論規則も、真理表を用いて直ちに導きだすことができる。例えば次のような具合である。

問題 2.3. 命題 P, Q について、$(P$ and $Q) \implies P$ および $P \implies (P$ or $Q)$ が成立することを、真理表を用いて示しなさい。

定義 2.1. **集合**とは、それに属するであるか否かがはっきり決まっているような「モノ」のあつまりである。(誰が見てもはっきりとどちらかに分かれていて、しかも意見が食い違わないということが大事である。)

上の定義もまたもや多少間に合わせ的である。もっと現代的には、いくつかの基本的な集合の存在をあらかじめ公理として定め、それらからいくつかの手続きによって作られた物のみを集合と呼ぶ。

集合 M にたいして、x が M に属するとき、x は M の**元 (要素)** であるといい、 $x \in M$ とか、 $M \ni x$ と書き、そうでないとき $x \notin M$ とか $M \not\ni x$ と書く。

あとの、「部分集合として含まれる」との区別を強調するため、$x \in M$ のことを「 x は M に元として含まれる。」という読み方をすることもある。

集合は、中カッコの中に集めるものを言葉で、あるいはリストアップして書きだすことにより表現できる。下の例を見よ。

例 2.2. (数学でよく使う集合の例)

(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
(2) 正の整数全体の集合 $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
(3) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} | x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$.
(4) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$.
(5) 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$.

例えば上の (3) のように、x,y の式 $f(x,y)$ と、 x,y を変数とする命題 $P(x)$ にたいして、

$$\{f(x,y)|\ P(x,y)\}$$

なる集合を考えることができる。これは $P(x,y)$ が真であるような x,y すべての組について、 $f(x,y)$ を集めてきた集合の意味である。(タテボウ | のところをセミコロン ; にする書き方もある。)

微分積分学で使う「区間」についても書いておこう。

定義 2.3. 実数 a,b $(a<b)$ について、次のように定義する。

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|\ a\le x\le b\}$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|\ a< x\le b\}$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|\ a\le x< b\}$$
$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|\ a< x< b\}$$

二つの集合 A,B が等しいことを示すには、「$x\in A$」 と 「$x\in B$」 とが同値であることを証明するのが常道である。

問題 2.4.

$$\{x\in\mathbb{R}; x^2<4\}=(-2,2)$$

を示しなさい。

定義 2.4. 集合 A,B が

$$x\in A \implies x\in B$$

をみたすとき、A は B の**部分集合**である (もしくは、A は B に部分集合として含まれる) といい、

$$A\subset B$$

($B\supset A$ と書くこともある) で表す。

この定義と上で述べたことを用いると、

$$A=B\Leftrightarrow(A\subset B \text{ and } A\supset B)$$

であることが分かる。

次の問題も部分集合の定義に戻って考えれば良い。

問題 2.5. $\{x\in\mathbb{R}; x>2\}\subset\{x\in\mathbb{R}; x^7>10\}$ を示しなさい。

定義 2.5. 集合 A,B にたいして、

$$A\cap B=\{x; x\in A \text{ and } x\in B\}$$
$$A\cup B=\{x; x\in A \text{ or } x\in B\}$$

をそれぞれ A と B の共通部分及び和集合という。

$A\cap B$ は A キャップ B とか、A インターセクション B と読む。「A かつ B」 と読む人もいるが紛らわしいからやめておいたほうが良い。同様に、$A\cup B$ は A カップ B とか、A ユニオン B と読む。

次のことは対応する論理の結果からすぐに分かる。

問題 2.6. 任意の集合 A,B に対して $A\cap B\subset A$ と $A\subset A\cup B$ が成り立つことを示しなさい。