

今回は、行列のジョルダンの標準形について PID 上の加群の理論の立場から概説しよう。つぎのような基本仮定を出発点とする。

基本仮定

k は体であるとし、ある正の整数 n について行列 $L \in M_n(k)$ が与えられているとする。このとき、一変数多項式環 $k[X]$ の $V = k^n$ への作用が

$$p(X).v = p(L)v$$

で定まる。これにより、 V を $k[X]$ -加群と見よう。

$k[X]$ は PID であるから、一般論 (命題 10.7) により、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 11.1. 基本仮定のもとで、 V は $k[X]/(p(X)^e)$ ($p(X)$ は $k[X]$ の素元。 e は正の整数) の形の $k[X]$ -加群の直和である。

命題 11.2. $f(X) \in k[X]$ を

$$f(X) = c_d X^d + c_{d-1} X^{d-1} + c_{d-2} X^{d-2} + \cdots + c_1 X + c_0$$

と書こう。 $g(X) \in k[X]$ の $k[X]/(f(X))$ におけるクラスを $[g]_f$ と書くことにする。このとき、

(1) $k[X]/(f(X))$ の基底として、

$$\{b_l = [X^l]_f; \quad (l = 0, 1, 2, \dots, d-1)\}$$

が取れる。

(2) 上の基底を用いると X の作用は

$$X.b_l = \begin{cases} b_{l+1} & (0 \leq l < d-1 \text{ のとき}) \\ -(c_{d-1}b_{d-1} + c_{d-2}b_{d-2} + \cdots + c_1b_1 + c_0b_0) & (l = d-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書き下せる。

例 11.3. $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ の基底として $b_0 = [1]_{X^2+1}$, $b_1 = [X]_{X^2+1}$ が取れる。 X のこの基底への作用は、

$$\begin{aligned} X.b_0 &= b_1 \\ X.b_1 &= -b_0 \end{aligned}$$

で与えられる。行列で表現すれば、

$$(X.b_0 \quad X.b_1) = (b_0 \quad b_1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という具合である。

定義 11.4. 体 k が代数的閉体であるとは、 k 上の任意の (次数が 1 以上の) 一変数多項式 $p(X)$ が一次式の積に分解するときを言う。

複素数体 \mathbb{C} は代数的閉体であることが知られている。任意の体 k に対して、それを含むような最小の代数的閉体 \bar{k} が存在することが知られている。このような \bar{k} のことを k の代数的閉包と呼ぶ。

以下、 k が代数的閉体のときを主に考える。このときには k 上の一変数既約多項式は一次式に限るから、次のことがわかる。

命題 11.5. 基本仮定のもとで、さらに k が代数的閉体であるとき、 V は $k[X]/((X-c)^e)$ ($c \in k$, $e \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の $k[X]$ -加群と同型である。

命題 11.2 のような基底を取れば、 $k[X]/(X-c)^e$ 上の X の作用の表現を得ることができるが、 c だけずらすことによって、さらに良い基底を取ることできる。

命題 11.6. (1) $k[X]/((X - c)^e)$ の基底として、

$$\{b_l = [(X - c)^l]_f; \quad (l = 0, 1, 2, \dots, e - 1)\}$$

が取れる。

(2) 上の基底を用いると X の作用は

$$X.b_l = \begin{cases} cb_l + b_{l+1} & (0 \leq l < e - 1 \text{ のとき}) \\ cb_l & (l = e - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書き下せる。行列で書くと

$$(X.b_0 \ X.b_1 \ X.b_2 \ \dots \ X.b_{e-1}) = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{e-1}) \begin{pmatrix} c & & & & \\ 1 & c & & & \\ & 1 & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & c \end{pmatrix}.$$

もしくは、基底の順番を取り換えて、

$$(X.b_{e-1} \ X.b_{e-2} \ X.b_{e-3} \ \dots \ X.b_0) = (b_{e-1} \ b_{e-2} \ b_{e-3} \ \dots \ b_0) J_e(c)$$

ただし $J_e(c)$ はジョルダン細胞と呼ばれる次のような行列である。

$$J_e(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & & & \\ & c & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 1 \\ & & & & c \end{pmatrix}.$$

系 11.7. 代数的閉体 k 上の行列 $L \in M_n(k)$ が与えられたとき、うまい基底変換行列 $P \in GL_n(k)$ をとれば、

$$PLP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{e_1}(c_1) & & & & \\ & J_{e_2}(c_2) & & & \\ & & J_{e_2}(c_2) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{e_s}(c_s) \end{pmatrix}$$

とジョルダン細胞の「直和」に分解される。

問題 11.1. $n = 2$ で、

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

のとき、基本仮定のようにして $V = \mathbb{C}^2$ を $\mathbb{C}[X]$ 加群と見よう。このとき、 V は $k[X]$ 上 $e_1 = {}^t(1 \ 1)$ で生成されることを示しなさい。

問題 11.2. 前問の仮定のもとで、 $\mathbb{C}[X]$ -加群の同型 $\mathbb{C}[X]/(X - 2)(X - 3) \cong V$ を作ってみせなさい。