代数学 II 要約 NO.5

第 5 回目の主題：$\boxed{\text{有限生成加群と自由加群の間の準同型}}$

◎有限生成加群 (再掲)

定義 5.1. A-加群 M が有限個の元で生成されるとき、M を A 上の**有限生成加群**と呼ぶ。

例 5.2. $\mathbb{R}^2$ は 有限生成 $\mathbb{R}$-加群だが、$\mathbb{Z}$-加群としては有限生成ではない。

補題 5.3. A-加群 M が有限個の元 $m_1, m_2, \ldots, m_s$ で生成されるとき、

(1) 写像

$$\varphi : A^s \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{s} a_i m_i$$

は A-加群の全射準同型である。

(2) $M \cong A^s / \operatorname{Ker}(\varphi)$.

** 一般に、M の A-加群としての生成元 $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとれば、全射 A-準同型

$$\varphi : A^{\oplus\Lambda} \ni (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda} a_\lambda m_\lambda$$

が定義されて、M は自由加群の剰余加群として表現されることが分かる。**

自由加群から一般の加群への準同型は次のように「生成元の行き先」で定まる。

命題 5.4. 環 A 上の加群 M にたいして、

(1) M の元 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ が与えられたとき、$A^{\oplus k}$ から M への A-準同型 φ が

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^{k} a_j . m_j$$

により定まる。

(2) $A^{\oplus k}$ から M への A-準同型は、上のような形のものに限る。

系 5.5. 環 A 上の加群 M にたいして、M が k 個の元 $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ で生成されるならば、

(1) 上記の命題のようにして全射 A-準同型 $\psi : A^{\oplus k} \to M$ が定まる。

(2) さらに、 $\operatorname{Ker}(\psi)$ も有限個の元で生成されるならば、適当な A 準同型

$$f : A^{\oplus k'} \to A^{\oplus k}$$

があって、M は f の余核 $A^{\oplus k} / \operatorname{Image}(f)$ と同型になる。(このような M のことを**有限表示をもつ** A 加群という。)

うえのことは、M が適当な有限性の条件を満足すれば (つまり、有限表示を持てば)、M は上のような準同型の余核として得られることを示している。

命題 5.6. A は可換環であるとする。このとき、$A^{\oplus k}$ から $A^{\oplus l}$ への任意の A-準同型 φ は、

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & & & \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

と書ける。