代数学 II 要約 NO.4

第 4 回目の主題：$\boxed{\text{加群の準同型定理}}$

「群の準同型定理」、「環の準同型定理」については既知であろう。A-加群の準同型定理も全く同様に定式化され、証明される。それらのもとになるのは次の考え方である。

命題 4.1. (集合の準同型定理) 集合の間の写像 $f : X \to Y$ が与えられたとする。このとき、

(1) X の上のクラスわけ (同値律) が、

$$x \sim_f y \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = f(y)$$

により定義される。(このクラスわけによる x のクラスをここでは $[x]_f$ と書こう。)

(2) X を上記のクラスわけによりクラスわけしたクラスの全体を $X/\sim_f$ と書くと、f は

$$\bar{f} : (X/\sim_f) \ni [x]_f \mapsto f(x) \in f(X)$$

なる写像を誘導する。この写像は、(うまく定義されており、) 全単射である。

(3) f は次のように全射、全単射、単射の合成に分解される。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle (\text{自然な射影})}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle (\text{自然な埋め込み})} \\ (X/\sim_f) & \xrightarrow{\bar{f}} & f(X) \end{array}$$

定理 4.2. (加群の準同型定理) 環 A と、A-加群の準同型 $f : M \to N$ が与えられているとする。このとき、

(1) f の核 $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ は M の A-部分加群である。
f の像 $f(M)$ は N の A-部分加群である。

(2) f は、A-加群の同型 $\bar{f} : M/\operatorname{Ker}(f) \to f(M)$ を定義する。

(3) f は次のように A-加群の全射準同型、全単射準同型、単射準同型の合成に分解する。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle (\text{自然な射影})}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle (\text{自然な埋め込み})} \\ (M/\operatorname{Ker}(f)) & \xrightarrow{\bar{f}} & f(M) \end{array}$$

つぎのことに気をつけよう

- 単なる集合の場合に比べて加群の場合には「和、差、スカラー倍」という**構造**を考慮に入れる必要がある。
- f が加群の準同型のときには「 f によるクラスわけ」は $\operatorname{Ker}(f)$ で完全に制御される。

例題 4.3. $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ を $f([n]_{12}) = [7n]_{14}$ で「定義」する。このとき

(1) これはうまく定義されていて、$\mathbb{Z}$-加群の準同型であることをしめしなさい。

(2) 次の対応表の下段を埋めなさい。(なるべく簡単な形にすること)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$												

(3) f によって $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ はどのようにクラス分けされるか、「クラス分けの表」を書き上げることによって示しなさい。

◎有限生成加群

定義 4.4. A-加群 M が有限個の元で生成されるとき、M を A 上の**有限生成加群**と呼ぶ。

例 4.5. $\mathbb{R}^2$ は 有限生成 $\mathbb{R}$-加群だが、$\mathbb{Z}$-加群としては有限生成ではない。

補題 4.6. A-加群 M が有限個の元 $m_1, m_2, \ldots, m_s$ で生成されるとき、

(1) 写像

$$\varphi : A^s \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{s} a_i m_i$$

は A-加群の全射準同型である。

(2) $M \cong A^s / \operatorname{Ker}(\varphi)$.

** 一般に、M の A-加群としての生成元 $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとれば、全射 A-準同型

$$\varphi : A^{\oplus \Lambda} \ni (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \sum_{\lambda} a_\lambda m_\lambda$$

が定義されて、M は自由加群の剰余加群として表現されることが分かる。**