代数学 II 要約 NO.3

第 3 回目の主題：

$\boxed{R\text{-加群の部分加群と商加群・}R\text{-加群の準同型定理}}$

補題 3.1. 環 R と R-加群 M が与えられているとする。M の部分集合 S に対して、次のことは同値である。

(1) S を含む M の部分加群は M 自身しかない。
(2) $M = \{\sum_{\text{有限和}} r_i s_i; r_i \in R, s_i \in R\}$

定義 3.2. S がうえの補題の性質を満たすとき、「S は M を生成する」という。

補題 3.3. 環 R と R-加群 M, および M の R-部分加群 N が与えられているとする。このとき、商加群 M/N には R-加群の構造が自然に入る。

この M/N のことを M の N による商 R-加群という。

命題 3.4. 環 A と、A 上の行列 $(a_{ji})_{i\in I, j\in J}$ が与えられていて、次のような条件を満たすとする。
(条件): 各 $j \in J$ に対して、$a_{ji} \neq 0$ なる $i \in I$ はたかだか有限個しかない。

このとき、 A-加群 M とその元 $\{m_i\}_{i\in I}$ の組 $(M, \{m_i\})$ に関する次の条件を考える。
(GR1) M は $\{m_i\}_{i\in I}$ で生成される。
(GR2) 任意の $j \in J$ に対して、関係式 $\sum_i a_{ji} m_i = 0$ をみたす。

このとき、A-加群 M_0 とその生成元 $\{m_i^{(0)}\}$ で次のようなものが同型を除いてただひとつ存在する。

(1) $(M_0, \{m_i^{(0)}\}$ は (GR1),(GR2) をみたす。
(2) もし、$(M_1, \{m_i^{(1)}\}$ も (GR1),(GR2) を満たすとすると、M_0 から M_1 への A-準同型 φ であって、$\varphi(m_i^{(0)}) = m_i^{(1)}$ をみたすものが存在する。

注意 3.5. 上の (2) で、φ はただひとつ定まり、しかも全射であることがすぐに分かる。

定義 3.6. 上の命題で定まる M_0 のことを、関係式

$$\sum_j a_{ji} m_i = 0$$

で定義される A-加群と呼ぶ。