線形代数学概論 A NO.12 要約

行列 A の分解 $A = PF_{m,n}(r)Q$ は「どのベクトルを活かすか」、「どのベクトルは潰すか」を決めていると考えることができるのでした。正則行列 P の逆行列は $(P \quad E)$ の行基本変形で求めることができるのでした。

....

今日のテーマ

連立一次方程式と行基本変形 (“加減法”)

命題 12.1. 縦ベクトル $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in \mathbb{R}^m$ と、これらを並べた行列 $A = (\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ を考える。このとき、$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ が一次従属であることは、$A\mathbb{w} = \mathbf{0}$ を満たすような $\mathbb{w} \in \mathbb{R}^n$ で、$\mathbf{0}$ とは異なるようなものが存在することである。

一般に、$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して $A\mathbb{w} = \mathbf{0}$ となるような $\mathbb{w}$ の全体を A の**核**といい、$\mathrm{Ker}(A)$ で表す。A の核は $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間であることが容易に分かる。行列の核は行列を調べる際に基本になる。A の核を求めるのは斉次型 (つまり、定数項のない) 連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

を解くのと同じことである。

命題 12.2. 正則行列 $P \in M_n(\mathbb{R})$ の列ベクトルを $\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2, \ldots, \mathbb{p}_n$ と書くとこれら n 個のベクトルは一次独立である。

(※) 転置行列。

行列 $A = (A_{ij})_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ の行と列をひっくり返してできる行列、すなわち $(A_{ji})_{ij}$ のことを A の転置行列といい、${}^tA$ で書き表す。たとえば、

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

などという具合。転置行列は次の性質を持つ

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad , {}^t(cA) = c c^t A^t (CD) = {}^tD + {}^tC,$$

(A, B, C, D は上の式が意味を持つようなサイズの行列。c はスカラー。)
転置行列を用いることにより、

行 $\leftrightarrow$列

行列を左から掛ける $\leftrightarrow$行列を右から掛ける

左基本変形 $\leftrightarrow$右基本変形

等々がそれぞれ入れ替わる。つまり一種の対称性があって、転置行列を考えることにより、行基本変形に関する議論を列基本変形の議論に変換したり、その逆ができる。これを用いると思考と鉛筆の節約ができる。たとえば、次の系が上の命題から従う。

系 12.1. 正方行列 P の行ベクトルも一次独立である。

◎ (非斉次) 連立一次方程式一般に、連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を解くことを考えよう。これは、$A = (a_{ij})$, $\mathbb{x} = (x_j)$, $\mathbb{b} = (b_i)$ と書けば、

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

という方程式を解くのと同じことである。行列 A のことを上の方程式の**係数行列**とよぶ。$\mathbb{b}$ は定数項、というわけだが、2つをまとめて、

$$(A \quad \mathbb{b})$$

という行列を考えると少しだけ便利である。(変数を書くのがサボれる。) この行列のことを上の方程式の**拡大係数行列**と呼ぶ。

今回は上の方程式を行基本変形のみを用いて解いてみよう。

例 12.1.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = b_1 \\ 5x + 6y + 7z + 8w = b_2 \\ 9x + 18y + 11z + 12w = b_3 \end{cases}$$

を解いてみよう。拡大係数行列の行基本変形を行うと、次のような具合になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & b_1 \\ 5 & 10 & 7 & 8 & | & b_2 \\ 9 & 18 & 11 & 12 & | & b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & | & b_2 - 5b_1 \\ 0 & 0 & -16 & -24 & | & b_3 - 9b_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 0 & -8 & -12 & | & b_2 - 5b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & \frac{5b_1 - b_2}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

最後の行列は**階段行列**になっている。行基本変形ではここらあたりまでしか変形できないが、方程式の解を求めるにはこれでも間に合う。すなわち、与えられた方程式は $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$ が成り立つ場合にのみ解を持ち、その場合の解は (「階段」の角にあたる 1 の係数の x, z を他の変数で芋づる式に表すことにより、)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t - \frac{1}{2}u + \frac{-7b_1 + 3b_2}{8} \\ t \\ -\frac{3}{2}u + \frac{5b_1 - b_2}{8} \\ u \end{pmatrix} \qquad (t, u \in \mathbb{R})$$

である。

問題 12.1. 連立方程式

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ -x - y + 4z + 5w = 1 \\ 2x + 2y + 3z + w = -2 \\ 3x + 3y + 2z + w = 1 \end{cases}$$

を拡大係数行列の行基本変形を利用してとけ。