線形代数学概論 A NO.8 要約

行列 は普通の数のように、足したり引いたり掛けたりできるのでした。行列をブロックに区分けすることにより、計算を簡単にすることができる場合がありました。

....

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 行列の基本変形

定義 8.1 (基本行列)**.**

$$P_n(ij;c) = E_n + cE_{ij} \qquad (i \neq j)$$
$$Q_n(i;c) = (E_n \text{ の } i \text{ 列 を } c \text{ 倍した行列}) \qquad (c \neq 0)$$
$$R_n(i,j) = (E_n \text{ の } i \text{ 列と } j \text{ 列を入れ替えた行列})$$

- この定義の記号は (教科書とは合わせてあるが)、ここだけのものである。
- 上の定義で「列」を「行」に変えても全く同じ行列を得る。
- スペースの関係で、例は一番最後にあげる。"..." を用いた一般の場合の書き方については、講義か、教科書を参照のこと。

◎ 置換と置換行列

上の P_n は「シフト」の一般化。Q_n は 対角行列である。R_n については新しく出てきた。これは「置換行列」と見るのが自然である。これを説明しよう。

定義 8.2. 一般に、$\{1,2,\ldots,n\}$ の順番を並べ替えたものを n 個の元の **置換**という。これは $\{1,2,\ldots,n\}$ からそれ自身への全単射 σ をあたえて、$(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n))$ という並びを考えるというのと同じ事である。そこで、以下では置換と言えばそのような σ のことであると考えることにする。

定義 8.3. n 個の元の置換 σ にたいし、

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{e}_{\sigma(1)} & \mathbb{e}_{\sigma(2)} & \ldots & \mathbb{e}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

なる行列のことを σ に対応する**置換行列**と呼ぶ。

定義 8.4. $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ $(i \neq j)$ に対し、i と j を入れ替えるような置換のことを (i と j の) **互換** とよび、$(i\ j)$ で書き表す。すなわち、$(i\ j)$ とは、次のような置換 τ のことである。

$$\tau(k) = \begin{cases} j & (k = i \text{ のとき}) \\ i & (k = j \text{ のとき}) \\ k & (\text{上記以外のとき。} \end{cases}$$

置換行列の言葉を用いれば、$R_n(ij)$ は互換 $(i\ j)$ に対応する置換行列と言うことになる。

◎右基本変形

与えられた行列 A (正方行列と限らない) にたいし、基本行列 (これは正方行列) を右からいくつかかけることにより、A と同じサイズの新しい行列を作ることができる。この操作を**右基本変形**という。

右基本変形は、基本ベクトルの行き先をみることで理解することができる。

命題 8.1. A を $m \times n$ 行列 (m 行 n 列の行列) とするとき、

(1) $AP_n(i,j;c)$ は A の i 列の c 倍を A の j 列に加えた行列である。

(2) $AQ_n(i;c)$ は A の j 列を c 倍した行列である。

(3) $AR_n(i,j)$ は A の i 列と j 列を入れ替えた行列である。

次のことも基本的である。

命題 8.2. 基本変形は可逆な操作である。それに呼応して、基本行列は可逆な行列である。

「大抵の」正方行列 A は右基本変形を連続して行うことにより単位行列 E_n に変形できる。つまり、基本行列 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ があって、

$$AY_1Y_2Y_3 \ldots Y_s = E_n.$$

そこで $B = Y_1Y_2Y_3 \ldots Y_s$ とおけば、$AB = E_n$ である。B は逆行列を持つので、B が A の逆行列であることがわかる。つまり、A にどんな右基本変形をすれば E_n になるかを詳細に記録すれば、A の逆行列が計算できる。右基本変形をいちいち記録しておくのは面倒である。次のようなトリックを用いるとよい。

命題 8.3. n 次正方行列 A にたいして、それを E_n の上に積み上げた行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$$

を考える。もし、$\hat{A}$ に右基本変形を繰り返して"上の部分"が E_n, すなわち

$$\begin{pmatrix} E_n \\ B \end{pmatrix}$$

のかたちとなったとすると、"下の部分"の B の部分が A の逆行列である。

問題 8.1. x, y, z はどの 2 つも相異なるような実数とする。このとき、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

に基本変形を繰り返して E_3 に変形せよ。(余力があれば、A の逆行列をもとめよ。)

…………………………………………………………………

例 8.1. ($n = 3$ の基本行列)

$$P_3(1,2;c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3(1,3;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3(2,3;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

他に成分が下半分にくるタイプももちろんあるが、スペースの関係で省略する。

$$Q_3(1,c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3(2;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3(3;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$R_3(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$